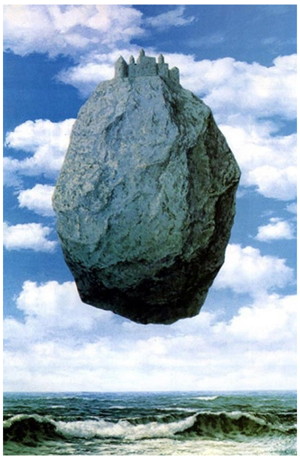
Gravitazione



Premessa sulla forze fondamentali e non

La seconda legge di Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

può essere usata, tipicamente, in due modi:

1. **osservato il moto, si determina la forza che lo causa**;
2. **data la forza, si determina il moto che produce**.

Premessa sulla forze fondamentali e non

Tutte le forze che abbiamo visto finora seguono la prima modalità: si fanno esperimenti in cui si caratterizza il tipo di moto, e da questi si deducono **leggi empiriche** per le forze coinvolte (esempio: legge di Hooke).

Le forze determinate da leggi empiriche sono generalmente **riconducibili a cause più complesse e profonde** (esempio: casi limite di interazioni più generali, come il peso, oppure manifestazioni macroscopiche di interazioni microscopiche di altro tipo, come gli attriti, i vincoli e le forze elastiche, ecc.)

Premessa sulla forze fondamentali e non

In alcuni casi, le espressioni delle forze che si ottengono dalle osservazioni appaiono molto generali e non riconducibili ad ulteriori cause più profonde. In tal caso le parla di **forze**, o **interazioni**, **fondamentali**.

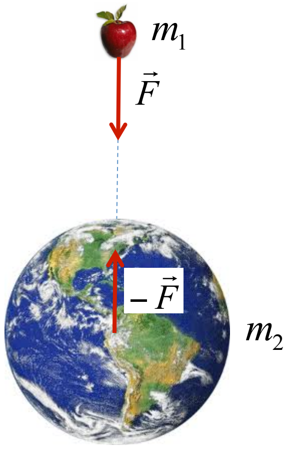
Si tratta di una selezione arbitraria e che può cambiare nel tempo, ma che riflette in modo sintetico le conoscenze sulla natura in una data epoca. La ricerca delle interazioni fondamentali è uno dei motori della fisica **!!**

La prima interazione fondamentale che incontriamo nello sviluppo della dinamica è l'**interazione gravitazionale**.

Forza gravitazionale

Due corpi qualsiasi dotati di massa si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza reciproca:

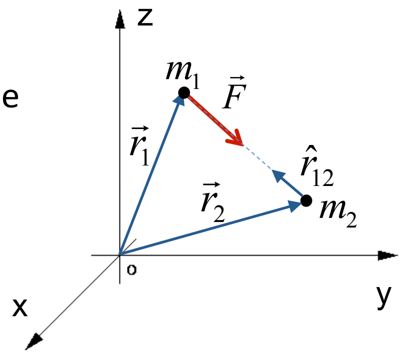
$$\left|\vec{F}\right| \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



Forza gravitazionale

Per essere più precisi, per due particelle puntiformi si può scrivere

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

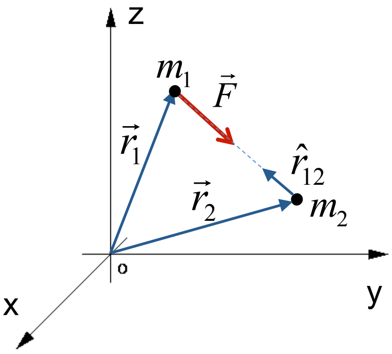


dove G è una costante universale, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ è la posizione relativa, $\hat{r}_{12}$ il suo versore e $r_{12} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|$ il suo modulo.

Fu introdotta da **Newton**.

Forza gravitazionale

Lo **scopo** di Newton era di ricondurre **diversi moti** ad un'**unica causa**: rivoluzione della terra intorno al sole, rivoluzione della luna attorno alla terra, caduta dei gravi.



$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

Forza gravitazionale

Su cosa poteva basarsi:

1) Le leggi di **Keplero** per moto dei pianeti.
2) Le leggi per la caduta dei gravi (Galileo).
3) Le leggi per il moto circolare uniforme (Huygens).
4) Il concetto di inerzia (Galileo).

A questi aggiunse:

5) La seconda legge.
6) Il principio di azione e reazione.

Forza gravitazionale

Il suo ragionamento, in sintesi:

1) La **prima legge di Keplero** dice che i pianeti percorrono orbite ellittiche.
Dato che l'eccentricità è piccola, Newton approssimò le orbite con **orbite circolari** di raggio costante r, riservandosi di verificare a posteriori che il problema ammetteva soluzioni più generali ellittiche.

Forza gravitazionale

2) La **terza legge di Keplero** dice che il rapporto tra il cubo del raggio e il quadrato del periodo è una costante uguale per tutti i pianeti; la costante potrà quindi dipendere solo dalle proprietà del sole che li attrae.

$$\frac{r^3}{T^2} = C_S$$

Forza gravitazionale

3) Per un **moto circolare uniforme** l'accelerazione centripeta vale in generale

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 C_S}{r^2}$$

e per i pianeti possiamo usare Keplero: $T^2 = \dfrac{r^3}{C_S}$

Forza gravitazionale

4) L'accelerazione centripeta del pianeta

$$\vec{a}_c = -\frac{4\pi^2 C_S}{r^2}\hat{r}$$

deve essere causata dalla sua **interazione con il sole**. Possiamo usare la **II legge di Newton** per legare l'accelerazione alla forza esercitata dal sole sul pianeta

$$m\vec{a}_c = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_S m}{r^2}\hat{r}$$

dove r è la distanza del pianeta dal sole e $\hat{r}$ il versore corrispondente (che punta verso il pianeta).

Forza gravitazionale

5) Ipotizziamo che la terra attragga verso di sé qualsiasi corpo, compresa la **luna**, con **lo stesso tipo di forza**

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_T m}{r^2}\hat{r}$$

dove C_T ora dipende dalle caratteristiche della terra, anziché da quelle del sole.
Possiamo fissare C_T utilizzando i parametri noti dell'orbita della luna (approssimata come circolare) e usando la III legge di Keplero:

$$C_T = \frac{r_{TL}^3}{T_L^2}$$

distanza media terra-luna

periodo di rivoluzione della luna

Forza gravitazionale

6) In questo modo abbiamo trovato che la terra attrae la luna con una forza del tipo

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_T m}{r^2}\hat{r} \qquad \text{con} \qquad C_T = \frac{r_{TL}^3}{T_L^2}$$

Se la **stessa forza agisce sui gravi** in prossimità della superficie terrestre, per essi possiamo scrivere:

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_T m}{r_T^2}\hat{r} = -\frac{4\pi^2 r_{TL}^3 m}{r_T^2 T_L^2}\hat{r} = -m\left(\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{r_T^2 T_L^2}\right)\hat{r} = -mg\hat{r}$$

raggio della terra

Forza gravitazionale

7) Verifichiamo che l'accelerazione di gravità così trovata

$$g = \frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{r_T^2 T_L^2}$$

è in accordo con quella misurata:

$$r_T \cong 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$$
$$r_{TL} \cong 60.1 r_T$$
$$T_L \cong 27\,g\,7\,h\,43\,m \cong 2.36 \times 10^6\,\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{g \cong 9.8\,\mathrm{m/s^2}}$$!!!

Questo è uno dei capolavori della fisica!

Forza gravitazionale

7) Dunque la terra attrae i corpi verso di sé con una forza

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_T m}{r^2}\hat{r} \qquad \text{con} \qquad C_T = \frac{r_{TL}^3}{T_L^2}$$

e il sole attrae i pianeti con una forza

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 C_S m}{r^2}\hat{r} \qquad \text{con} \quad C_S = \text{costante che dipende dal sole}$$

Le due costanti sono diverse. Vorremmo qualcosa di più **universale**.

Forza gravitazionale

8) Per ottenere qualcosa di più **universale** torniamo al problema di Keplero per i pianeti e usiamo il principio di **azione e reazione**.
Se il sole attrae il pianeta di massa m_p con una forza

$$F = \frac{4\pi^2 C_S m_p}{r^2} \qquad C_S = \text{costante che dipende dal sole}$$

allora il pianeta attrae il sole di massa m_s con una forza della stessa natura

$$F = \frac{4\pi^2 C_p m_S}{r^2} \qquad C_p = \text{costante che dipende dal pianeta}$$

Forza gravitazionale

8) per il principio di azione e reazione le due forze devono essere uguali in modulo: $\frac{4\pi^2 C_S m_p}{r^2} = \frac{4\pi^2 C_p m_S}{r^2}$

ovvero $\boxed{\frac{4\pi^2 C_S}{m_S} = \frac{4\pi^2 C_p}{m_p}}$

ma notiamo che il membro di sinistra dipende solo dalle proprietà del sole e quello di destra solo da quelle del pianeta, indipendentemente da quale pianeta. Il rapporto $4\pi^2 C/m$ è dunque indipendente dalla sorgente della forza.
È universale **!!** Lo chiamiamo G

Forza gravitazionale

8) Quindi il sole attrae il pianeta di massa m_p con una forza

$$F = \frac{4\pi^2 C_S m_p}{r^2} = \frac{4\pi^2 C_S m_p m_S}{m_S r^2} = G\frac{m_p m_S}{r^2}$$

il pianeta attrae il sole di massa m_s con una forza

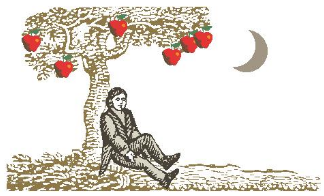
$$F = \frac{4\pi^2 C_p m_S}{r^2} = \frac{4\pi^2 C_p m_p m_S}{m_p r^2} = G\frac{m_p m_S}{r^2}$$

la terra attrae tutti i corpi con una forza

$$F = \frac{4\pi^2 C_T m}{r^2} = \frac{4\pi^2 C_T m_T m}{m_T r^2} = G\frac{m_T m}{r^2}$$

ecc.

Forza gravitazionale



8) Possiamo così concludere che la forza che agisce tra il sole e i pianeti, tra la terra e la luna, tra la terra e i corpi in prossimità della sua superficie e, più in generale, tra tutti i corpi dotati di massa, ha la forma

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

[*nota: è un primo esempio di "unificazione", tra moti planetari e moto dei gravi; ai fisici piacciono le grandi unificazioni*]

Forza gravitazionale

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

Una volta arrivati a questa conclusione, basata su conoscenze precedenti e su nuove congetture, il passo successivo consiste nell'assumere che questa sia l'espressione generale delle forza gravitazionale e nell'inserire questa espressione nell'equazione del moto (II legge di Newton) per vedere quali sono tutti i moti possibili che ne conseguono.

Vedremo più avanti come si ottengono le orbite di Keplero (ellissi, ma non solo...).

Forza gravitazionale

Difficoltà incontrata da Newton *#1*

Aveva a disposizione **misure poco accurate** della distanza terra-luna. Quelle che aveva lo portavano ad un valore di g troppo diverso da quello misurato.

Pensò che la teoria fosse sbagliata, fino a che, molto più tardi, non gli comunicarono nuove misure più precise.

Con le nuove misure l'accordo tra teoria e misure era buono. Solo allora pubblicò i suoi risultati.

Forza gravitazionale

Difficoltà incontrata da Newton *#2*

Trovare le soluzioni del problema del moto, assegnata la forza, non era affatto semplice a quell'epoca.

Non esisteva il calcolo infinitesimale **!!**

Newton se l'è inventato apposta. Leibniz l'ha introdotto in modo indipendente nello stesso periodo.

Forza gravitazionale

Difficoltà incontrata da Newton *#3*

Le masse coinvolte nei moti planetari e nella caduta dei gravi sono **estese**, non puntiformi.
Ad esempio, la terra attrae gli oggetti sulla sua superficie come fosse una particella puntiforme di massa m_T tutta concentrata nel suo centro **??**
La risposta è **sì**, ma Newton dovette dedicare molte pagine del suo libro per dimostrarlo.
Più avanti mostreremo che è vero per una qualsiasi forza proporzionale a $1/r^2$ se la sorgente della forza è isotropa (cioè con simmetria sferica).