Sistemi di riferimento accelerati (parte 1)

Sistemi di riferimento accelerati

Abbiamo visto le trasformazioni di Galileo tra le coordinate di sistemi di riferimento inerziali in moto relativo uniforme.

Ma cosa succede se il moto di una particella è osservato da un sistema di riferimento accelerato **??**

Sistemi di riferimento accelerati

Caso generale: un sistema S' che trasla con velocità non costante e ruota rispetto ad un sistema inerziale.

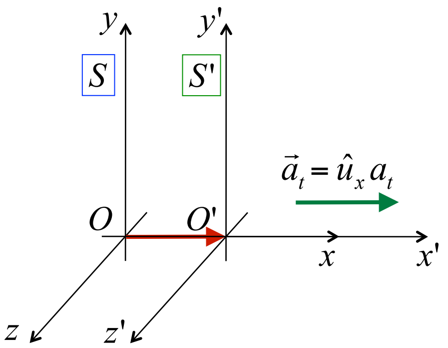
Tratteremo separatamente due casi:

- **traslazione** con accelerazione costante;
- **rotazione** rispetto ad un asse fisso con velocità angolare costante.

La fisica che ci interessa c'è tutta. Il caso generale è solo più complicato formalmente.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Sia $\vec{a}_t$ l'accelerazione di S' rispetto ad un sistema inerziale S. Scegliamo (arbitrariamente, e senza perdere generalità) i due assi x e x' nella direzione di $\vec{a}_t$, con l'origine coincidente al tempo $t = 0$.

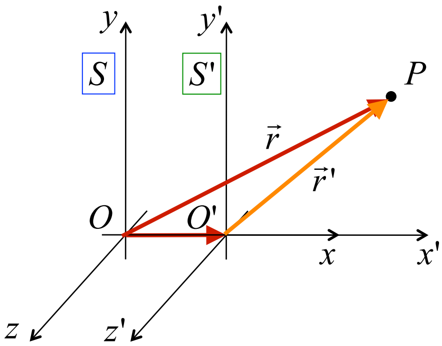


$$\overrightarrow{OO'}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2$$

questa è la posizione di O' vista dal sistema di riferimento S

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Sia $\vec{a}_t$ l'accelerazione di S' rispetto ad un sistema inerziale S. Scegliamo (arbitrariamente, e senza perdere generalità) i due assi x e x' nella direzione di $\vec{a}_t$, con l'origine coincidente al tempo $t=0$.



$$\overrightarrow{OO'}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \overrightarrow{OO'} = \vec{r}\,' + \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2$$

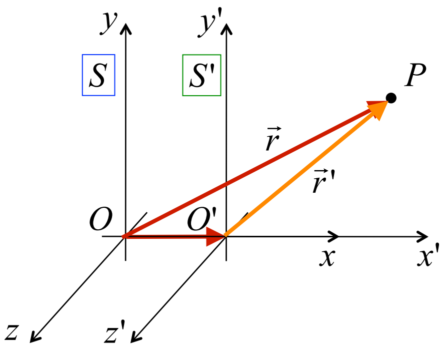
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2}$$

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Derivando si trova la relazione tra le velocità

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{a}_t t = \vec{v} - \vec{a}_t t}$$

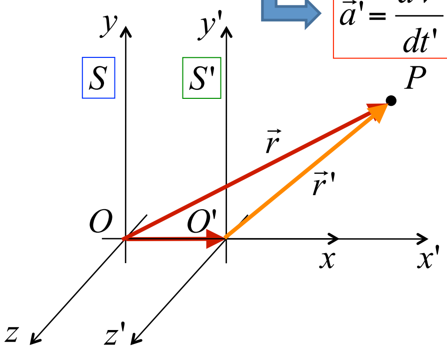


Sistema di riferimento con accelerazione costante

Derivando di nuovo si trova la relazione tra le accelerazioni

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2} \Rightarrow \boxed{\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_t t^2\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{a}_t t = \vec{v} - \vec{a}_t t}$$

$$\boxed{\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{a}_t t) = \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{a}_t = \vec{a} - \vec{a}_t}$$



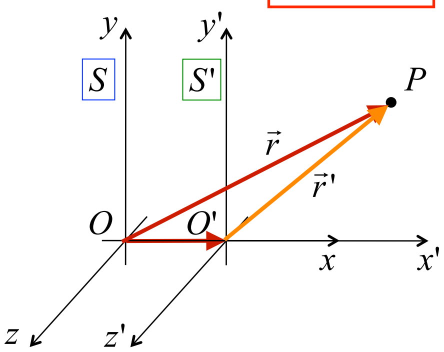
L'accelerazione non è più invariante **!!**

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t}$$

Sistema di riferimento con accelerazione costante

In S' si misura un'accelerazione **diversa** da quella misurata in sistemi di riferimento inerziali. La differenza **non può** essere spiegata in termini di forze (reali) diverse.

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t}$$



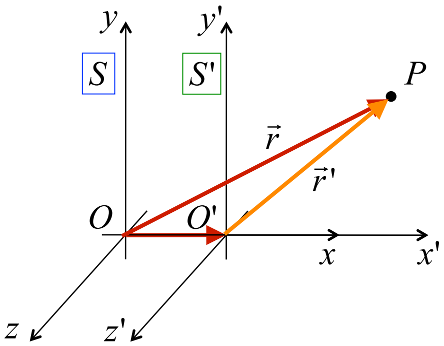
Possiamo ricordarci l'esempio della biglia sul treno che frena. Solo l'osservatore esterno descriverà correttamente il moto in termini di forze e usando le leggi di Newton.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

La seconda legge di Newton **vale solo** nei sistemi inerziali**!!**

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

Dove questa è la risultante delle forze vere, che agiscono sulla particelle per effetto della presenza di altre particelle che ne influenzano il moto.



Sistema di riferimento con accelerazione costante

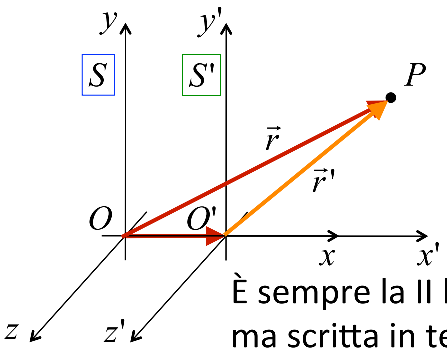
La seconda legge di Newton **vale solo** nei sistemi inerziali**!!**

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

Cosa succede se usiamo la relazione $\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t$ **?**

$$m(\vec{a}\,' + \vec{a}_t) = \vec{F}$$

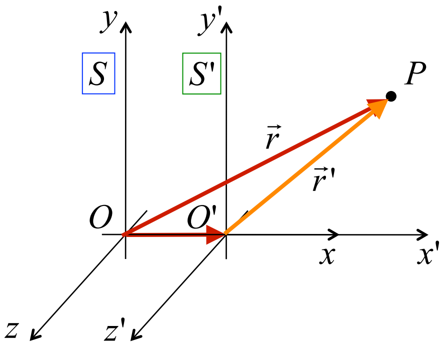
$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\vec{a}_t$$



È sempre la II legge nel sistema inerziale, ma scritta in termini di $\vec{a}\,'$.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

La seconda legge di Newton (nel sistema inerziale) $m\vec{a} = \vec{F}$ riscritta per l'accelerazione misurata nel sistema non inerziale, diventa $m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_t$

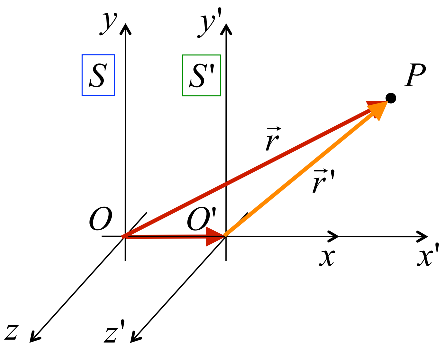


Questa è utile nel caso in cui **sia nota** l'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$. Allora il termine $-m\vec{a}_t$ è noto, ha le dimensioni di una forza e può essere visto come una "**forza apparente**" (o "fittizia" o "inerziale").

Sistema di riferimento con accelerazione costante

In sintesi, se osserviamo il moto nel sistema accelerato, possiamo usare la II legge nella forma

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{app}}} \quad \text{dove} \quad \boxed{\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{a}_t}$$



è una forza apparente, dovuta al fatto che il sistema non è inerziale.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

$$\boxed{\vec{F}_{\text{app}} = -m\,\vec{a}_t}$$

Non è una forza vera perché:

- Non è riconducibile all'azione di altri corpi.
- Non vale il principio di azione e reazione.
- Ha origine dal moto del sistema di riferimento.

Altra peculiarità: è sempre direttamente proporzionale alla massa (inerziale) della particella **!!**

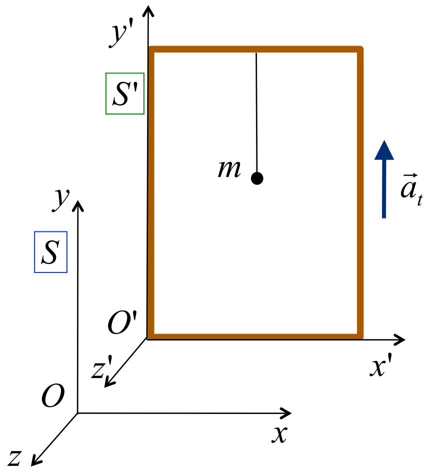
Sistema di riferimento con accelerazione costante

$$\boxed{\vec{F}_{\text{app}} = -m\,\vec{a}_t}$$

Il fatto che le forze apparenti non siano vere forze, non vuol dire che non esistano **!!**
Infatti, se uno si trova nelle condizioni di voler/dover usare le coordinate di un sistema di riferimento accelerato e, nonostante questo, vuole descrivere il moto in termini dei principi di Newton, **deve** includere le forze apparenti nella II legge. E per farlo, **deve** conoscere già l'accelerazione di trascinamento (è il prezzo da pagare per usare la II legge dove non si potrebbe).

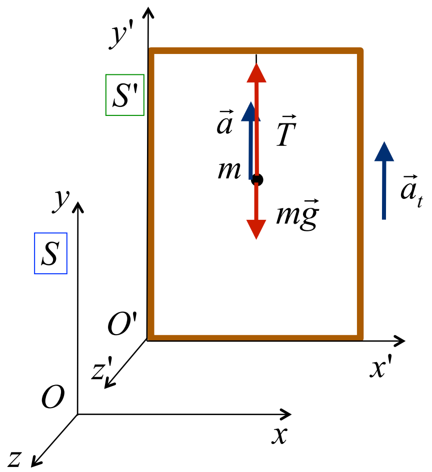
Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



Pendolo visto nel sistema **inerziale *S***.

Equazione del moto lungo y:

$$m\,a = T - mg$$

D'altra parte sappiamo che

$$a = a_t$$

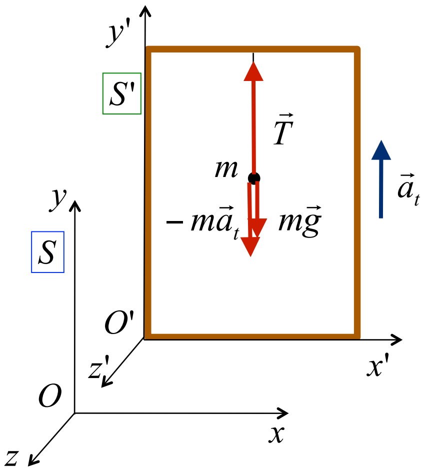
e dunque

$$T = m(g + a_t)$$

Questa è la tensione del filo che serve per l'equilibrio del pendolo.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



Pendolo visto nel sistema **non inerziale S'**.

Equazione del moto lungo y':

$$ma' = T - mg - ma_t$$

D'altra parte sappiamo che

$$a' = 0$$

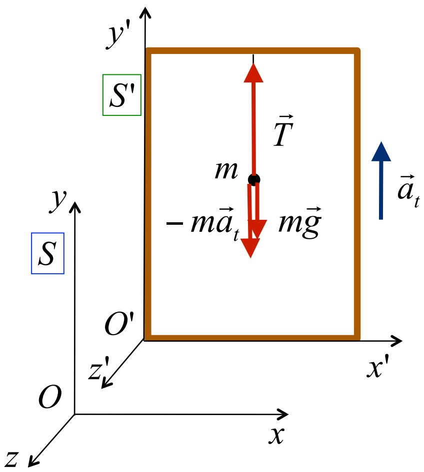
e dunque

$$T = m(g + a_t)$$

Come prima**!!**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

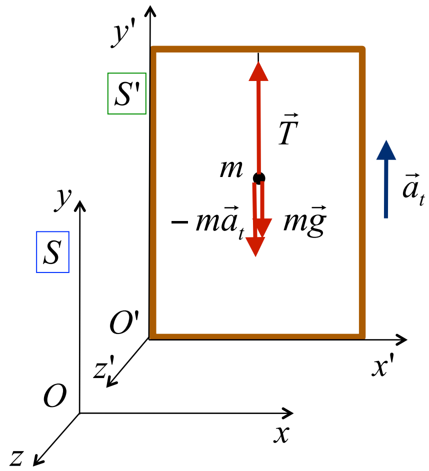
Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



Il **risultato è lo stesso** perché abbiamo usato la **stessa equazione** (la II legge nel sistema inerziale). Per l'osservatore nell'ascensore ci siamo limitati a portare un termine **da sinistra a destra** dell'uguale, chiamandolo forza apparente.
Si può fare e, a volte, è conveniente.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato

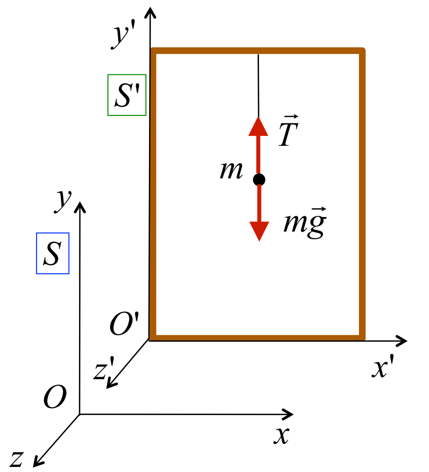


$$\boxed{T = m(g + a_t)}$$

Notiamo che se l'ascensore accelera verso l'alto ($a_t>0$), allora $T > mg$. Se accelera verso il basso ($a_t<0$), allora $T < mg$.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato

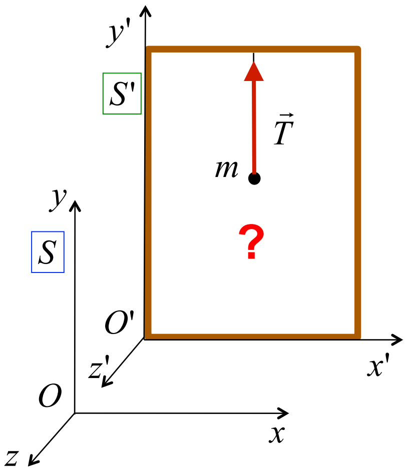


Nota:
Se $a_t=0$ i due sistemi sono entrambi inerziali e la tensione bilancia solo il peso:

$$T = m|\vec{g}| = mg$$

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



Ma se fossimo **chiusi nell'ascensore** e misurassimo

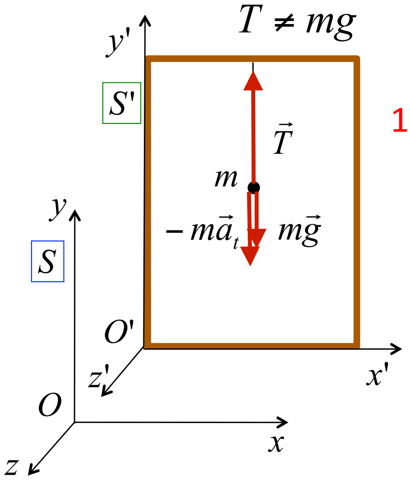
$$T \neq mg$$

cosa ne dedurremmo**?**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato

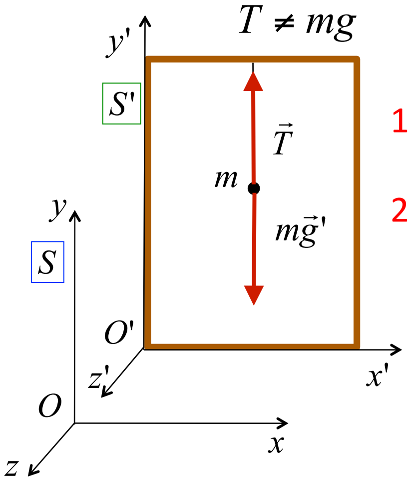
$$T \neq mg$$



1. L'ascensore sta accelerando;

Sistema di riferimento con accelerazione costante

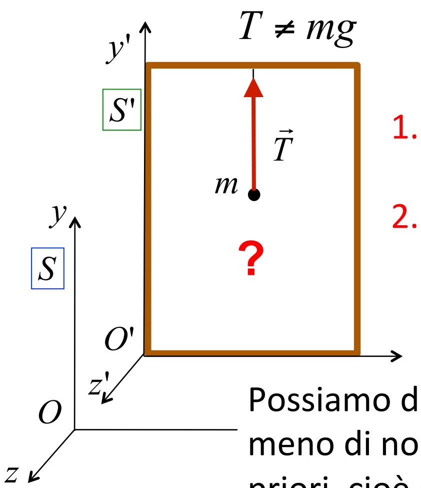
Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



1. L'ascensore sta accelerando;
2. l'ascensore è fermo, ma il valore di g è diverso da quello previsto.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



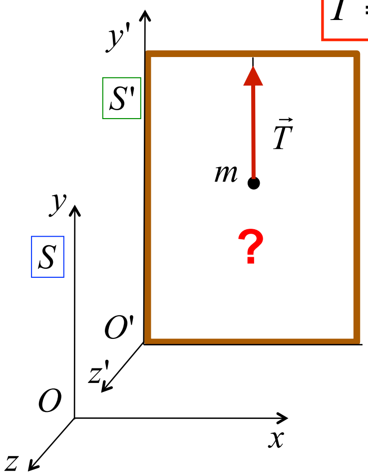
1. L'ascensore sta accelerando;
2. l'ascensore è fermo, ma il valore di g è diverso da quello previsto.

Possiamo distinguere i due casi? **No**, a meno di non conoscere la risposta a priori, cioè conoscere g oppure a_t **!!**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato

$$\boxed{T = m(g + a_t)}$$

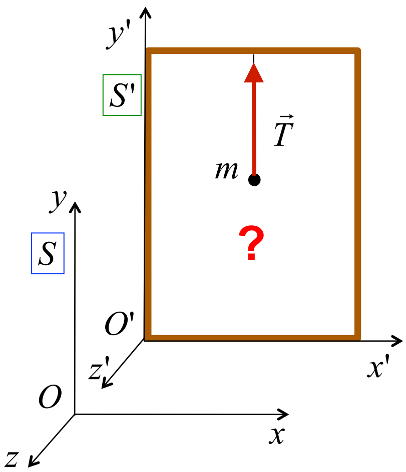


Se conosciamo a priori g, allora la misura di T permette di determinare a_t (accelerometro).

Viceversa, se conosciamo a_t, allora la misura di T permette di determinare g (gravimetro).

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato

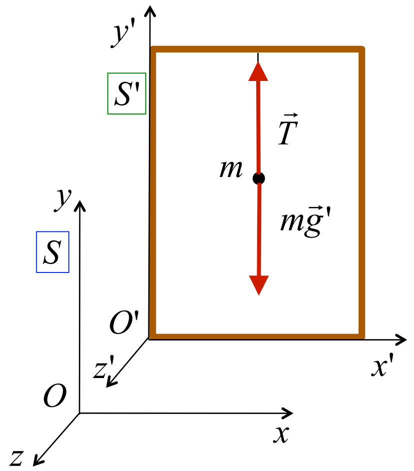


1. L'ascensore sta accelerando;
2. L'ascensore è fermo, ma il valore di g è diverso da quello previsto.

Senza informazioni aggiuntive, le due opzioni sono **equivalenti** **!!**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



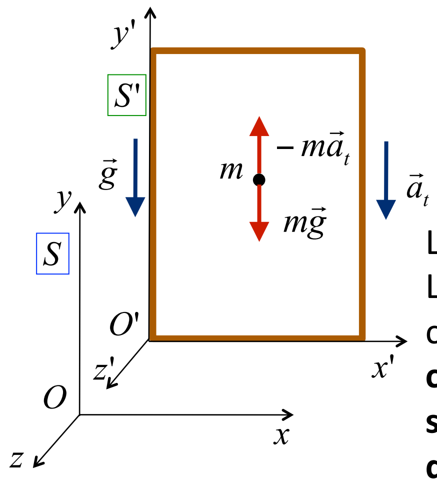
In qualsiasi misura facciamo, peso e forza apparente entrano sempre nella forma

$$m(\vec{g}+\vec{a}_t)=m\vec{g}'$$

e i due addendi non sono separabili senza informazioni indipendenti, che mettano in relazione *S* con *S'*.

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Caso interessante: **ascensore in caduta libera**



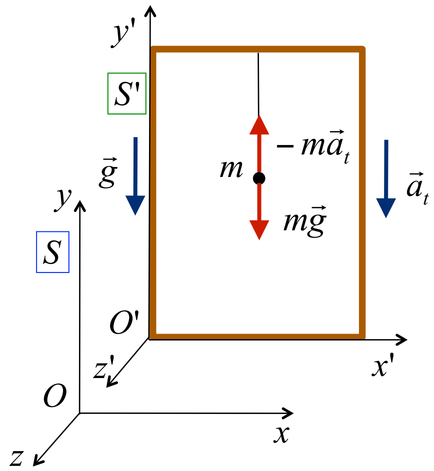
$$a_t = -g$$

$$mg' = m(g+a_t) = 0$$

La gravità "efficace" è nulla. La particella nell'ascensore in caduta libera si comporta **come** si trovasse in un **sistema inerziale in assenza di gravità !!**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Caso interessante: **ascensore in caduta libera**



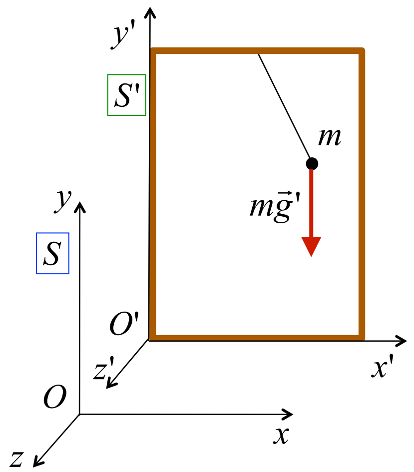
$$a_t = -g$$

$$T = m(g + a_t) = 0$$

Nel caso del pendolo la tensione si annulla: il filo non serve per tenere la particella in equilibrio **!!**

Sistema di riferimento con accelerazione costante

Esempio: esperimenti in un ascensore accelerato



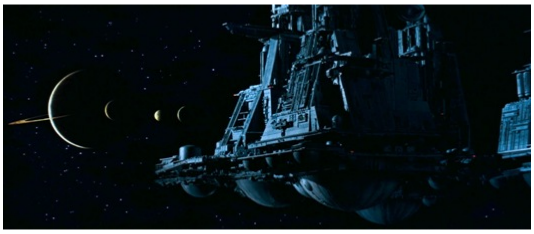
Potremmo cambiare tipo di esperimenti.

Ad esempio, misurare il periodo di oscillazione del pendolo.

Le conclusioni sarebbe le stesse **!!**

Principio di equivalenza

Un'accelerazione costante del sistema di riferimento in una certa direzione è equivalente ad un campo di gravità uniforme in direzione opposta



Principio di equivalenza

Un'accelerazione costante del sistema di riferimento in una certa direzione è equivalente ad un campo di gravità uniforme in direzione opposta

Esempio **(versione #1)**: siete sull'astronave Nostromo e, dopo un lungo viaggio intergalattico, il computer di bordo vi sveglia dall'ibernazione controllata. Vi alzate e percepite il vostro peso contro il pavimento, un po' obliquo. Pensate di essere stati svegliati perchè *l'astronave è atterrata su un pianeta sconosciuto, adagiandosi sul fianco di una collina*. Prendete un dinamometro e una massa campione e misurate *l'accelerazione di gravità per stabilire su quale pianeta siete, usando i valori di* g *per i pianeti noti che trovate nel manuale* (il computer di bordo, HAL, riciclato da un'altra astronave, si rifiuta di *dirvi dove siete*).

Principio di equivalenza

Un'accelerazione costante del sistema di riferimento in una certa direzione è equivalente ad un campo di gravità uniforme in direzione opposta

Esempio **(versione #2)**: siete sull'astronave Nostromo e, dopo un lungo viaggio intergalattico, il computer di bordo vi sveglia dall'ibernazione controllata. Vi alzate e percepite il vostro peso contro il pavimento, un po' obliquo. Pensate di essere stati svegliati perchè *l'astronave a breve atterrerà sul pianeta previsto dai piani di volo, e dovete prepararvi*. Prendete un dinamometro e una massa campione e misurate *l'accelerazione di frenata dell'astronave, per assicurarvi che si immetta in orbita con la giusta velocità* (il computer di bordo, HAL, riciclato da un'altra astronave, si rifiuta di *darvi i parametri di frenata*).

Principio di equivalenza

Un'accelerazione costante del sistema di riferimento in una certa direzione è equivalente ad un campo di gravità uniforme in direzione opposta

La versione #1 e la versione #2 sono **equivalenti** e **non distinguibili**, a meno che non guardiate **fuori** dal finestrino dell'astronave **!!**

Principio di equivalenza

Un'accelerazione costante del sistema di riferimento in una certa direzione è equivalente ad un campo di gravità uniforme in direzione opposta

Il principio di equivalenza, nella nostra formulazione, segue dai principi della dinamica e da un'ulteriore assunzione, che è rimasta finora implicita: l'uguaglianza della massa **gravitazionale** e della massa **inerziale**.

Principio di equivalenza

La massa **inerziale** è quella che avevamo definito nell'introduzione alla dinamica, usando i carrelli, ed è quella che entra a sinistra nella seconda legge

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

La massa **gravitazionale** è quella che entra nell'espressione della forza gravitazionale

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

e, di conseguenza, nell'espressione della forza peso

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}}$$

Principio di equivalenza

Non c'è una ragione a priori per assumerle uguali, dato che originano da concetti diversi (l'inerzia di un corpo e la sua interazione con altri corpi).

Nella relazione $m\vec{a} = m\vec{g}$

quella inerziale è a sinistra, quella gravitazionale è destra. L'osservazione che l'accelerazione di caduta dei gravi è la stessa per tutti, implica che le due masse siano uguali.

Abbiamo assunto che siano uguali anche nel derivare l'espressione della forza gravitazionale da Keplero.

Principio di equivalenza

Dunque, se sono validi i principi di Newton e se le masse inerziale e gravitazionale sono uguali allora vale il principio di equivalenza.

[*Ma potremmo ragionare al contrario: assumere vero il principio di equivalenza fin dall'inizio e dedurne tutte le implicazioni... questo è interessante per gli sviluppi della fisica oltre la meccanica newtoniana*]

Esercizio suggerito

Un vagone di un treno accelera con accelerazione costante lungo un binario rettilineo. Ad un certo istante una vite si stacca dal soffitto del vagone. Si studi il moto sia nel sistema di riferimento inerziale che in quello accelerato. [*es. 3.10 Dalba-Fornasini*]

Sistemi di riferimento accelerati

Caso generale: un sistema S' che trasla con velocità non costante e ruota rispetto ad un sistema inerziale.

Tratteremo separatamente due casi:

Fatto!

- **traslazione** con accelerazione costante;
- **rotazione** rispetto ad un asse fisso con velocità angolare costante.

Sistemi di riferimento accelerati

Caso generale: un sistema S' che trasla con velocità non costante e ruota rispetto ad un sistema inerziale.

Tratteremo separatamente due casi:

Fatto!

- **traslazione** con accelerazione costante;
- **rotazione** rispetto ad un asse fisso con velocità angolare costante.

da fare...

le rotazioni richiedono il formalismo dei prodotti vettoriali. Parentesi matematica da aprire...