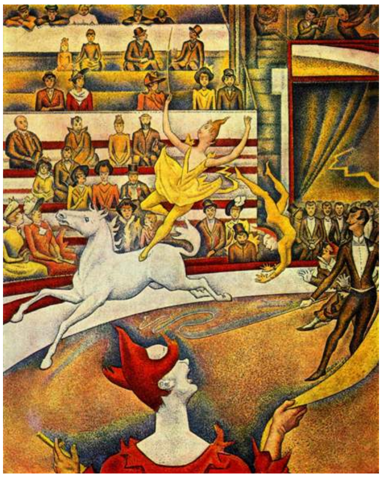
Sistemi di riferimento accelerati (parte 2)



Sistemi di riferimento accelerati

Eravamo arrivati qui:

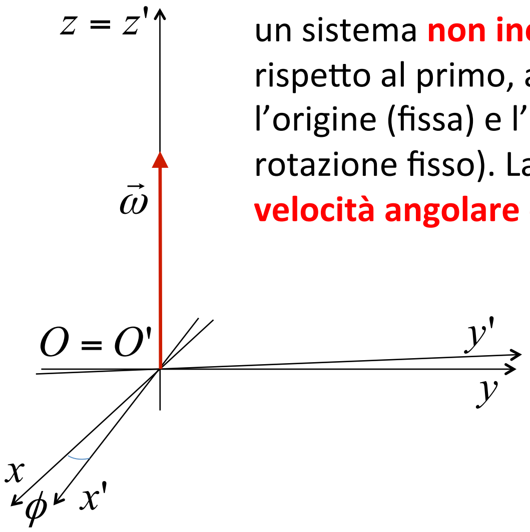
Fatto!

- **traslazione** con accelerazione costante;
- **rotazione** rispetto ad un asse fisso con velocità angolare costante.

da fare...

Abbiamo appena visto come si definiscono i prodotti vettoriali, che servono per trattare le rotazioni.
Ora possiamo procedere…

Sistemi di riferimento in rotazione

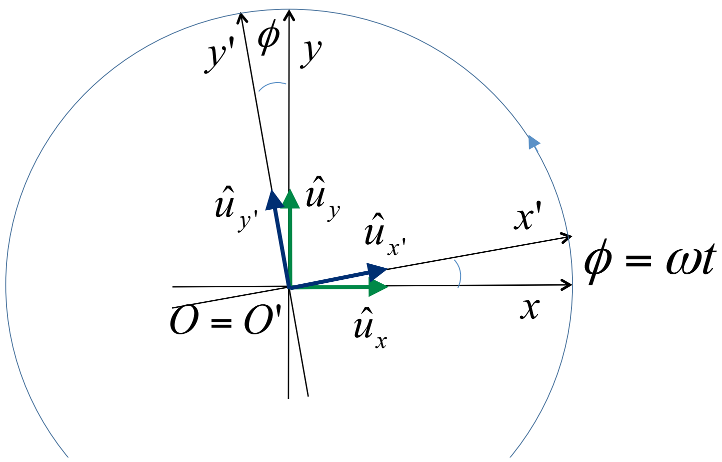


Consideriamo un sistema inerziale S e un sistema **non inerziale** S' che ruoti rispetto al primo, avendo in comune l'origine (fissa) e l'asse z (asse di rotazione fisso). La rotazione avvenga a **velocità angolare costante**:

$$\phi = \omega t$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Visto da sopra:



Sistemi di riferimento in rotazione

Semplifichiamo la notazione dei versori per comodità di scrittura:

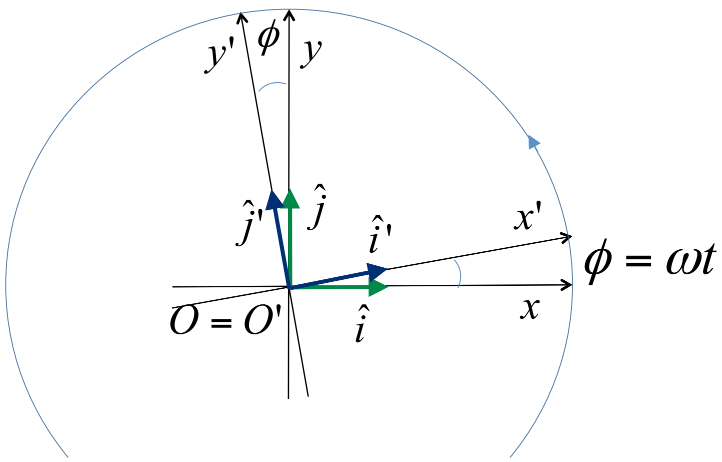
$$\hat{u}_x = \hat{i} \qquad \hat{u}_{x'} = \hat{i}'$$

$$\hat{u}_y = \hat{j} \qquad \hat{u}_{y'} = \hat{j}'$$

$$\hat{u}_z = \hat{k} \qquad \hat{u}_{z'} = \hat{k}'$$

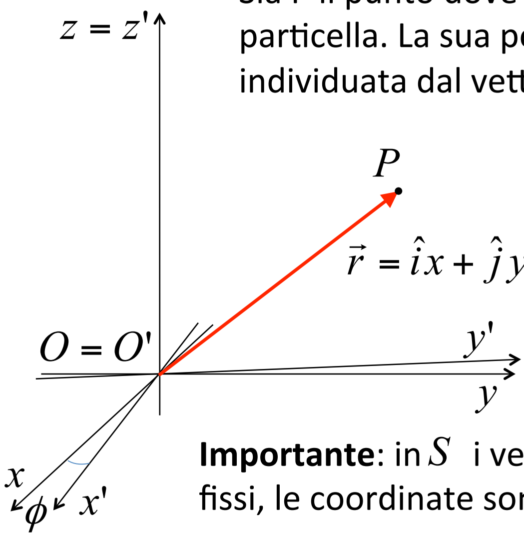
Sistemi di riferimento in rotazione

Visto da sopra:



Sistemi di riferimento in rotazione

Sia P il punto dove si trova una particella. La sua posizione in S è individuata dal vettore posizione $\vec{r}$.

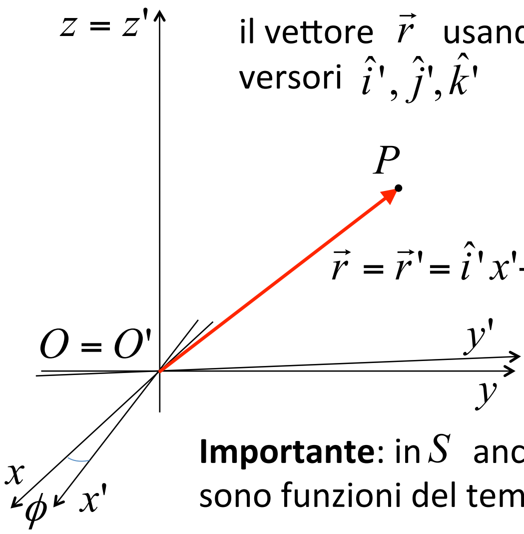


$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

Importante: in S i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono fissi, le coordinate sono funzioni del tempo.

Sistemi di riferimento in rotazione

Stando in S nulla vieta di decomporre il vettore $\vec{r}$ usando la nuova terna di versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$

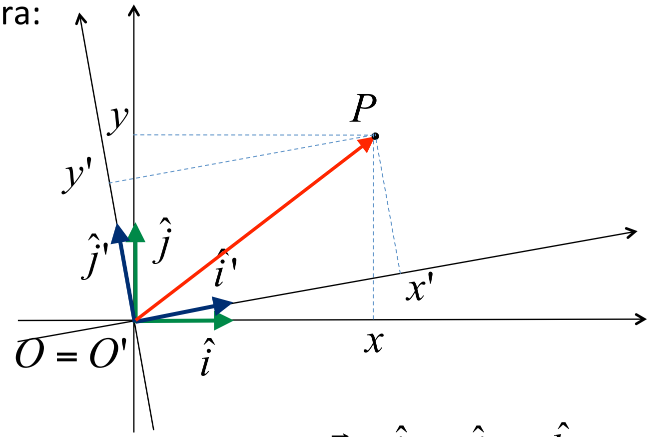


$$\vec{r} = \vec{r}' = \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z'$$

Importante: in S anche i versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ sono funzioni del tempo **!!**

Sistemi di riferimento in rotazione

Visto da sopra:



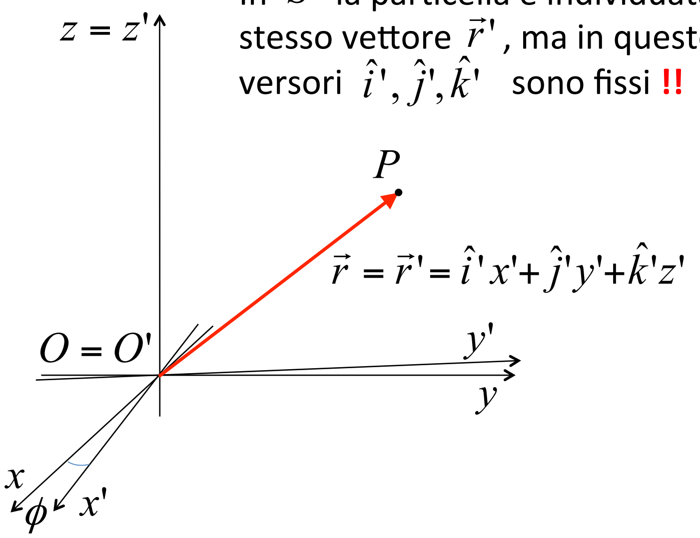
Stesso vettore espresso con due terne diverse, una fissa, l'altra no

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\vec{r} = \vec{r}' = \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z'$$

Sistemi di riferimento in rotazione

In S' la particella è individuata dallo stesso vettore $\vec{r}'$, ma in questo caso i versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ sono fissi **!!**



Sistemi di riferimento in rotazione

Torniamo in S e calcoliamo la velocità della particella.
Possiamo usare entrambe le terne.
Usando $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S$$

derivata calcolata in S

$$= \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$= \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$$

avendo usato il fatto che i versori sono **fissi** in S.

Sistemi di riferimento in rotazione

Invece, usando $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

derivata calcolata in S

$$= \left(\frac{d}{dt}(\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z')\right)_S$$

$$= \frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{i}'\frac{dx'}{dt} + \hat{j}'\frac{dy'}{dt} + \hat{k}'\frac{dz'}{dt}$$

avendo usato il fatto che i versori **non** sono fissi S.

Sistemi di riferimento in rotazione

Le due espressioni

$$\vec{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{i}'\frac{dx'}{dt} + \hat{j}'\frac{dy'}{dt} + \hat{k}'\frac{dz'}{dt}$$

corrispondono alla stessa velocità, quella della particella misurata nel sistema inerziale, ma espressa in due modi diversi **!!**

Sistemi di riferimento in rotazione

Esaminiamo più attentamente questa:

$$\vec{v} = \frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{i}'\frac{dx'}{dt} + \hat{j}'\frac{dy'}{dt} + \hat{k}'\frac{dz'}{dt}$$

Gli ultimi tre termini possono essere scritti così:

$$\hat{i}'\frac{dx'}{dt} + \hat{j}'\frac{dy'}{dt} + \hat{k}'\frac{dz'}{dt} = \hat{i}'v_x' + \hat{j}'v_y' + \hat{k}'v_z'$$

v_x', v_y', v_z' sono le tre componenti della velocità della particella misurata in S', dove i versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ sono fissi:

$$\boxed{\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \hat{i}'v_x' + \hat{j}'v_y' + \hat{k}'v_z'}$$

derivata calcolata in S'

Sistemi di riferimento in rotazione

Dunque

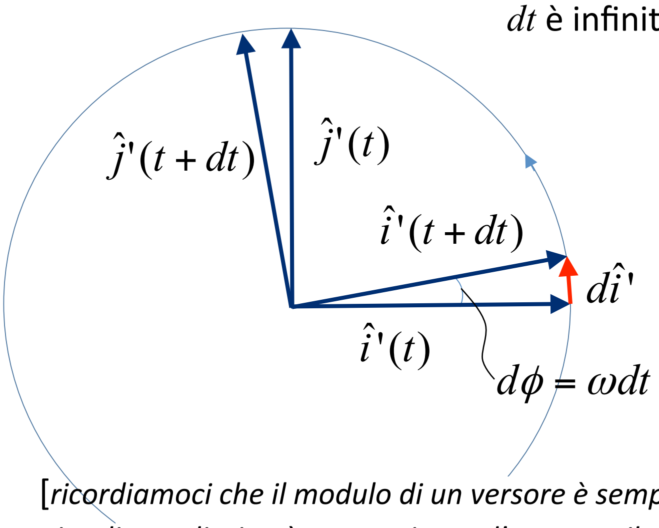
$$\vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}z'$$

e ci rimangono da calcolare le derivate dei versori.
Calcoliamo prima

$$\frac{d\hat{i}'}{dt}$$

$d\hat{i}'$ è la differenza tra il versore al tempo $t+dt$ e lo stesso versore al tempo t.

Sistemi di riferimento in rotazione

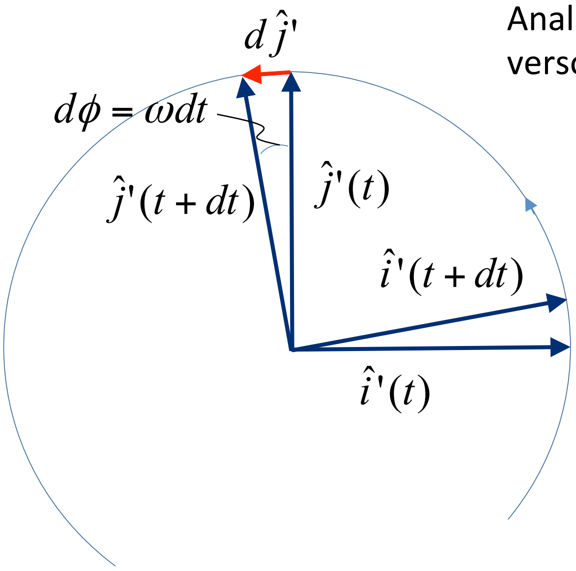


Si vede dal grafico che, se dt è infinitesimo, allora

$$\begin{aligned} d\hat{i}' &= \hat{j}'\left|d\hat{i}'\right| \\ &= \hat{j}'\,d\phi \\ &= \hat{j}'\,\omega dt \end{aligned}$$

[*ricordiamoci che il modulo di un versore è sempre 1 e che, per piccoli angoli, si può approssimare l'arco con il segmento secante*]

Sistemi di riferimento in rotazione



Analogamente per l'altro versore:

$$d\hat{j}' = -\hat{i}'\left|d\hat{j}'\right|$$
$$= -\hat{i}'\,d\phi$$
$$= -\hat{i}'\,\omega dt$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Abbiamo trovato

$$d\hat{i}' = \hat{j}'\omega dt$$
$$d\hat{j}' = -\hat{i}'\omega dt$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \hat{j}'\omega$$
$$\frac{d\hat{j}'}{dt} = -\hat{i}'\omega$$

Inoltre sappiamo che i versori

$$\hat{k}' = \hat{k}$$

coincidono e sono fissi

$$\frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$$

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \hat{j}'\omega \quad , \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = -\hat{i}'\omega \quad , \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$$

Possiamo esprimerle usando il vettore $\vec{\omega} = \hat{k}\omega = \hat{k}'\omega$
Infatti, dalla definizione di prodotto vettoriali e dalla ortogonalità della terna cartesiana, segue che:

$$\hat{j}'\omega = \vec{\omega}\times\hat{i}', \quad -\hat{i}'\omega = \vec{\omega}\times\hat{j}', \quad 0 = \vec{\omega}\times\hat{k}'$$

E quindi possiamo concludere che

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i}' \quad , \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{j}' \quad , \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{k}'$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Eravamo arrivati qui $\quad \vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\hat{i}'}{dt}x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}z'$

E ora abbiamo anche le derivate dei versori e possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\hat{i}'x' + \vec{\omega}\times\hat{j}'y' + \vec{\omega}\times\hat{k}'z' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega}\times(\hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z') \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\end{aligned}$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Abbiamo ottenuto la legge di composizione delle velocità:

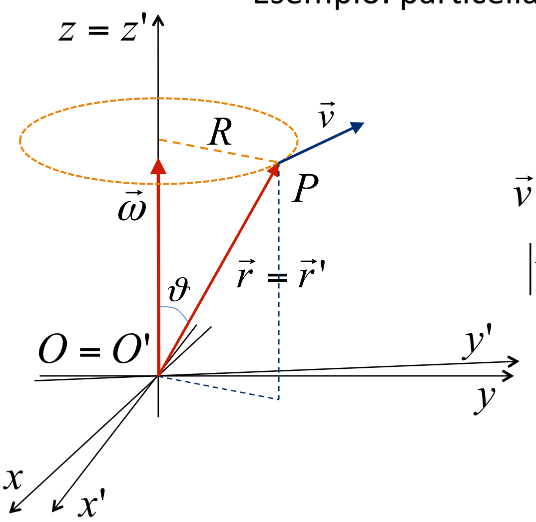
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$$

velocità della particella misurata in S ($\vec{v}$)

velocità della stessa particella misurata in S' ($\vec{v}\,'$)

Per legare le due velocità è quindi necessario conoscere la velocità di rotazione del sistema non inerziale rispetto al sistema inerziale (com'era per l'accelerazione di trascinamento nelle traslazioni).

Sistemi di riferimento in rotazione



Esempio: particella ferma in S'

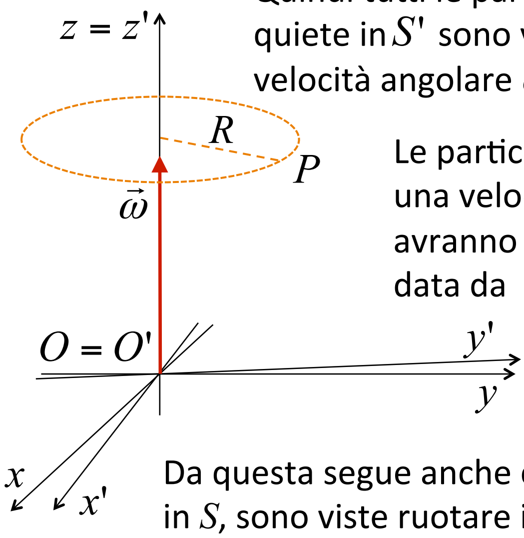
$$\vec{v}\,' = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}| = \omega r \operatorname{sen} \vartheta = \omega R$$

È la velocità di un particella che ruota attorno all'asse z in S. **OK**

Sistemi di riferimento in rotazione



Quindi tutti le particelle che sono in quiete in S' sono viste ruotare con velocità angolare ω in S .

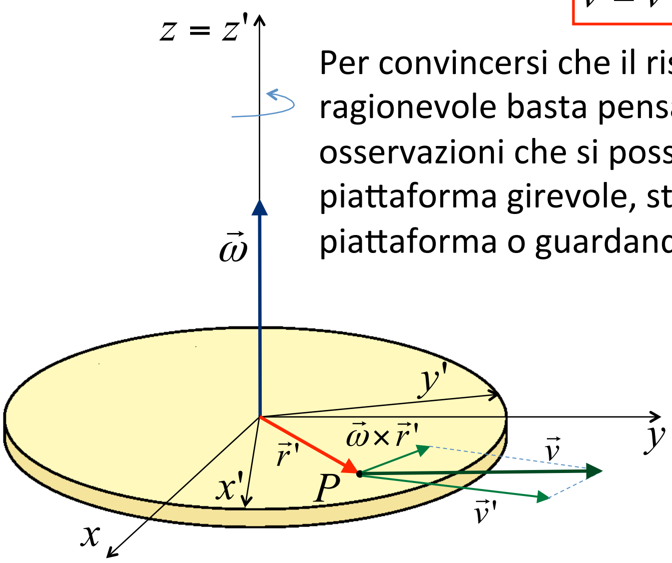
Le particelle che hanno anche una velocità $\vec{v}'$ in S' avranno una velocità $\vec{v}$ in S data da

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

Da questa segue anche che le particelle ferme in S, sono viste ruotare in verso opposto in S'.

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$



Per convincersi che il risultato è ragionevole basta pensare alle osservazioni che si possono fare su una piattaforma girevole, stando sulla piattaforma o guardando dall'esterno.

Sistemi di riferimento in rotazione

Ora vediamo come si trasforma l'**accelerazione**.
Basta derivare di nuovo rispetto al tempo.
Calcoliamo la derivata in S della velocità della particella misurata in S, ma usando la terna di versori che ruotano

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt}\right)_S$$

con

$$\vec{r}' = \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z'$$
$$\vec{v}' = \hat{i}'v_x' + \hat{j}'v_y' + \hat{k}'v_z'$$

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}(\hat{i}'v_x' + \hat{j}'v_y' + \hat{k}'v_z')\right)_S + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

$$= \hat{i}'\frac{dv_x'}{dt} + \hat{j}'\frac{dv_y'}{dt} + \hat{k}'\frac{dv_z'}{dt} + \frac{d\hat{i}'}{dt}v_x' + \frac{d\hat{j}'}{dt}v_y' + \frac{d\hat{k}'}{dt}v_z' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Qui abbiamo usato il fatto che ω è costante e che i versori dipendono dal tempo; inoltre abbiamo utilizzato il risultato precedente per

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\vec{a}=\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S+\left(\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}\right)_S=\left(\frac{d}{dt}(\hat{i}'v_x'+\hat{j}'v_y'+\hat{k}'v_z')\right)_S+\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

$$=\underbrace{\hat{i}'\frac{dv_x'}{dt}+\hat{j}'\frac{dv_y'}{dt}+\hat{k}'\frac{dv_z'}{dt}}_{\vec{a}'}+\frac{d\hat{i}'}{dt}v_x'+\frac{d\hat{j}'}{dt}v_y'+\frac{d\hat{k}'}{dt}v_z'+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Questa è l'accelerazione della particella misurata in S', dove i versori $\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'$ sono fissi.

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\vec{a}=\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S+\left(\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}\right)_S=\left(\frac{d}{dt}(\hat{i}'v_x'+\hat{j}'v_y'+\hat{k}'v_z')\right)_S+\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

$$=\hat{i}'\frac{dv_x'}{dt}+\hat{j}'\frac{dv_y'}{dt}+\hat{k}'\frac{dv_z'}{dt}+\frac{d\hat{i}'}{dt}v_x'+\frac{d\hat{j}'}{dt}v_y'+\frac{d\hat{k}'}{dt}v_z'+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$=\vec{a}'+\underbrace{\frac{d\hat{i}'}{dt}v_x'+\frac{d\hat{j}'}{dt}v_y'+\frac{d\hat{k}'}{dt}v_z'}+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Qui possiamo usare le derivate dei versori, già calcolate:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{i}' \quad , \quad \frac{d\hat{j}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{j}' \quad , \quad \frac{d\hat{k}'}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{k}'$$

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\vec a = \left(\frac{d\vec v'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d(\vec\omega\times\vec r')}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}(\hat i' v_x' + \hat j' v_y' + \hat k' v_z')\right)_S + \vec\omega\times\left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_S$$

$$= \hat i'\frac{dv_x'}{dt} + \hat j'\frac{dv_y'}{dt} + \hat k'\frac{dv_z'}{dt} + \frac{d\hat i'}{dt}v_x' + \frac{d\hat j'}{dt}v_y' + \frac{d\hat k'}{dt}v_z' + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \frac{d\hat i'}{dt}v_x' + \frac{d\hat j'}{dt}v_y' + \frac{d\hat k'}{dt}v_z' + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \vec\omega\times\hat i' v_x' + \vec\omega\times\hat j' v_y' + \vec\omega\times\hat k' v_z + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \vec\omega\times(\underbrace{\hat i' v_x' + \hat j' v_y' + \hat k' v_z'}_{\text{questa è } \vec v'}) + \vec\omega\times\vec v' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

Sistemi di riferimento in rotazione

$$\vec a = \left(\frac{d\vec v'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d(\vec\omega\times\vec r')}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}(\hat i' v_x' + \hat j' v_y' + \hat k' v_z')\right)_S + \vec\omega\times\left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_S$$

$$= \hat i'\frac{dv_x'}{dt} + \hat j'\frac{dv_y'}{dt} + \hat k'\frac{dv_z'}{dt} + \frac{d\hat i'}{dt}v_x' + \frac{d\hat j'}{dt}v_y' + \frac{d\hat k'}{dt}v_z' + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \frac{d\hat i'}{dt}v_x' + \frac{d\hat j'}{dt}v_y' + \frac{d\hat k'}{dt}v_z' + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \vec\omega\times\hat i' v_x' + \vec\omega\times\hat j' v_y' + \vec\omega\times\hat k' v_z + \vec\omega\times(\vec v' + \vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + \vec\omega\times(\hat i' v_x' + \hat j' v_y' + \hat k' v_z') + \vec\omega\times\vec v' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

$$= \vec a' + 2\vec\omega\times\vec v' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$$

ecco fatto.

Sistemi di riferimento in rotazione

Il risultato finale è:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}$$

L'accelerazione **non è invariante !!**
Ce l'aspettavamo, visto che uno dei due sistemi di riferimento non è inerziale.
La legge di trasformazione è un po' più complicata di quella del caso di traslazione con accelerazione costante, che era

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t}$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Come avevamo fatto per la traslazione, anche qui possiamo introdurre **forze apparenti**. Basta scrivere la seconda legge di Newton nel sistema inerziale, usando la relazione tra le accelerazioni misurate nei due sistemi:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m[\vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')] = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{Coriolis}} + \vec{F}_{\mathrm{centrifuga}}$$

Sistemi di riferimento in rotazione

Ecco le forze apparenti nel caso di un sistema di riferimento in rotazione:

Forza di Coriolis $\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

Forza centrifuga $\vec{F}_{\text{centrifuga}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

Non sono forze vere perché:

- Non sono riconducibili all'azione di altri corpi.
- Non vale il principio di azione e reazione.
- Hanno origine dal moto del sistema di riferimento.

Altra peculiarità: sono proporzionali alla massa m.

Sistemi di riferimento in rotazione

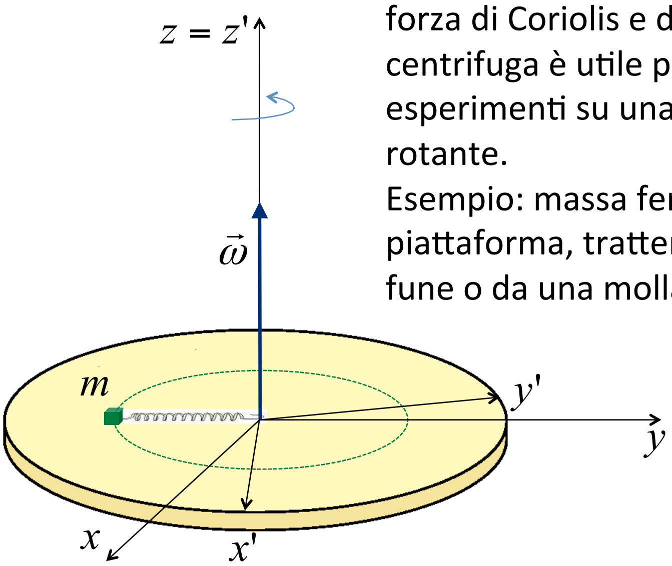
In sintesi, come nel caso del sistema di riferimento che trasla con accelerazione costante, anche nel caso delle rotazioni possiamo usare la seconda legge di Newton con le coordinate del sistema non inerziale, al prezzo di aggiungere le forze apparenti di Coriolis e centrifuga

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} + \vec{F}_{\text{centrifuga}}}$$

Per farlo è necessario conoscere a priori la velocità angolare di rotazione del sistema.

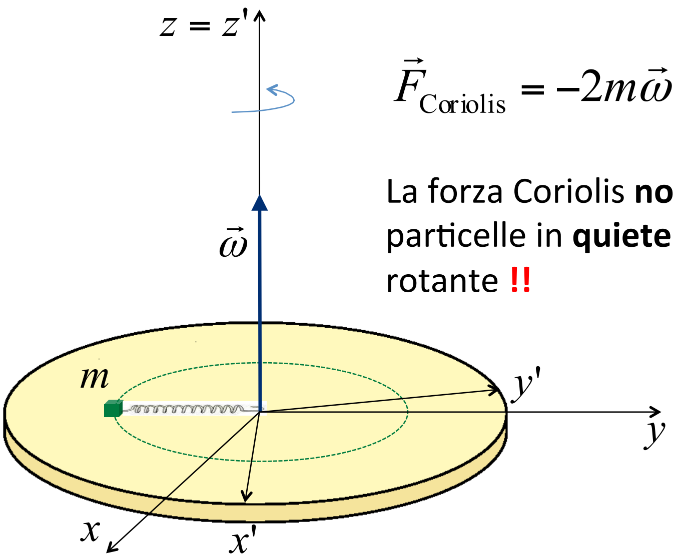
[*i sistemi inerziali rimangono privilegiati: sono quelli in cui si può descrivere il moto senza necessità di informazioni esterne al sistema*]

Piattaforma rotante



Per capire il significato della forza di Coriolis e della forza centrifuga è utile pensare ad esperimenti su una piattaforma rotante.
Esempio: massa ferma sulla piattaforma, trattenuta da una fune o da una molla.

Piattaforma rotante

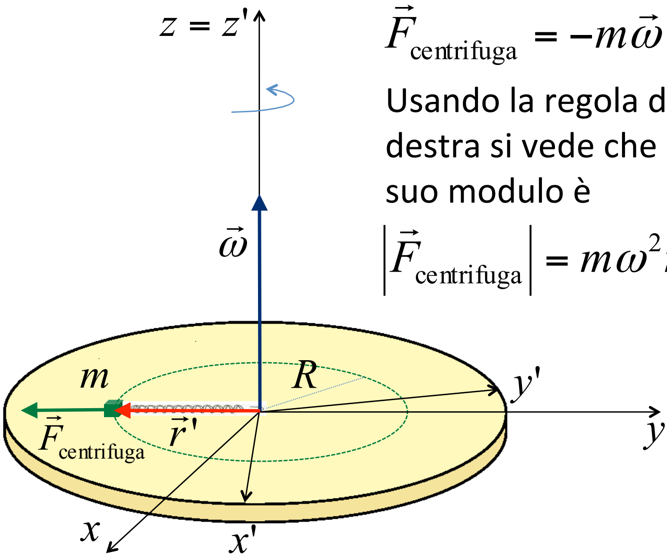


Massa ferma ⇒ $\vec{v}' = 0$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$$

La forza Coriolis **non** agisce su particelle in **quiete** nel sistema rotante **!!**

Piattaforma rotante



Rimane questa:

$$\vec{F}_{\text{centrifuga}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

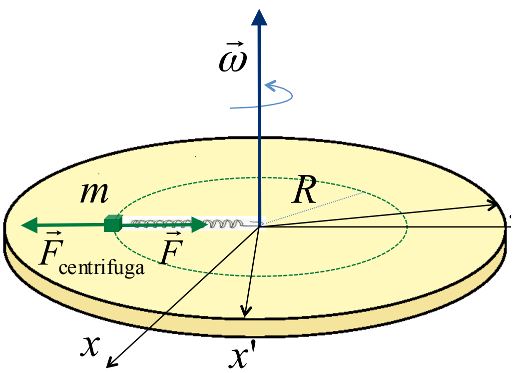
Usando la regola della mano destra si vede che è radiale. Il suo modulo è

$$\left|\vec{F}_{\text{centrifuga}}\right| = m\omega^2 r' = m\omega^2 R$$

Piattaforma rotante

Seconda legge **sulla piattaforma**: $m\vec{a}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{centrifuga}}$

Ma l'accelerazione è nulla per ipotesi (il corpo è in equilibrio rispetto alla piattaforma): $0 = \vec{F} + \vec{F}_{\text{centrifuga}}$



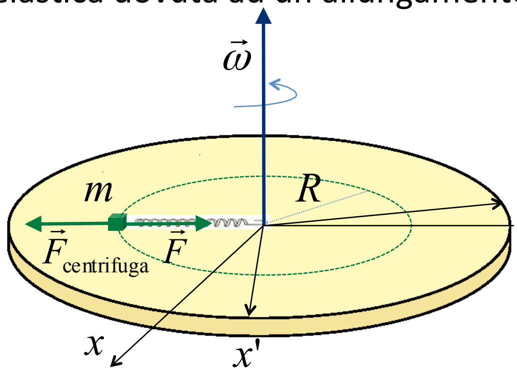
La forza che trattiene il corpo deve essere uguale e contraria alla forza centrifuga.

$$\left|\vec{F}\right| = m\omega^2 R$$

Piattaforma rotante

Seconda legge **sulla piattaforma**: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{centrifuga}}$

Si noti che la forza $\vec{F}$ è una **forza vera**. Nel caso di una fune sarà la tensione, nel caso di una molla sarà la forza elastica dovuta ad un allungamento della molla stessa, ecc.

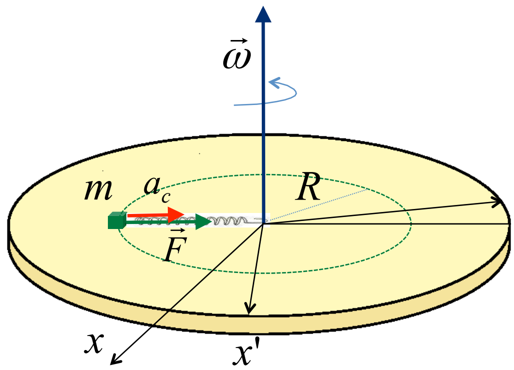


Vista dalla piattaforma, questa forza serve a compensare la forza centrifuga.

Piattaforma rotante

Come si spiega il moto osservandolo dal sistema **inerziale?**
La seconda legge di Newton è questa $m\vec{a} = \vec{F}$
e il corpo è visto compiere un moto circolare uniforme.
Quindi l'accelerazione sarà puramente centripeta:

$$a_c = \omega^2 R$$

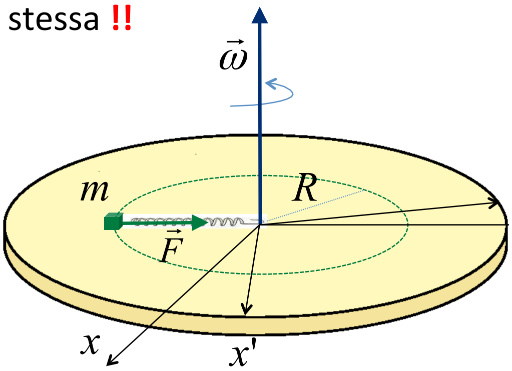


La forza necessaria a imprimere questa accelerazione dovrà essere quindi radiale, con modulo

$$\left|\vec{F}\right| = m\omega^2 R$$

Piattaforma rotante

Conclusione: la forza (reale) che serve a spiegare il moto è la **stessa**. Nel **sistema inerziale** essa produce l'accelerazione associata al moto circolare uniforme; nel **sistema non inerziale** serve a compensare la forza centrifuga per garantire l'equilibrio. Ma la fisica è la stessa **!!**

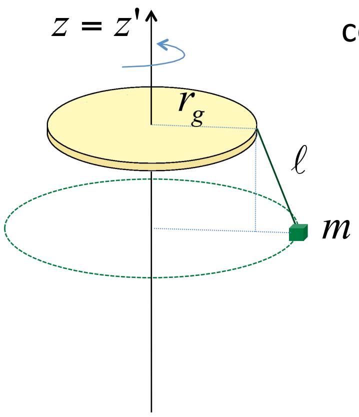


La forza centrifuga e l'accelerazione centripeta sono legate da

$$\vec{F}_{\text{centrifuga}} = -m\vec{a}_c$$

ma entrano in gioco in sistemi di riferimento diversi **!!**

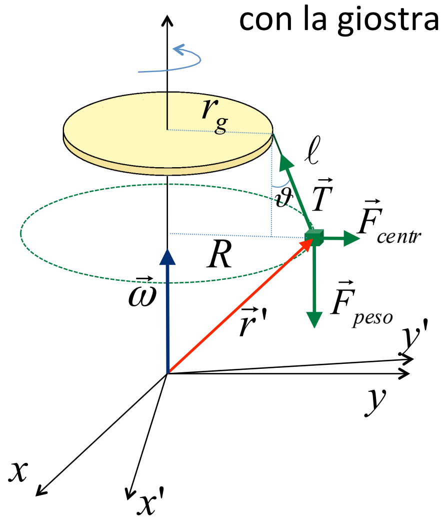
Piattaforma rotante



Caso leggermente più complicato: giostra.

Piattaforma rotante

Vista nel sistema **non inerziale in rotazione** con la giostra la massa è in quiete e la fune sta ad un angolo ϑ dalla verticale. L'accelerazione è nulla. La seconda legge si scrive così:



$$0 = \vec{F}_p + \vec{T} + \vec{F}_{\text{centr}}$$

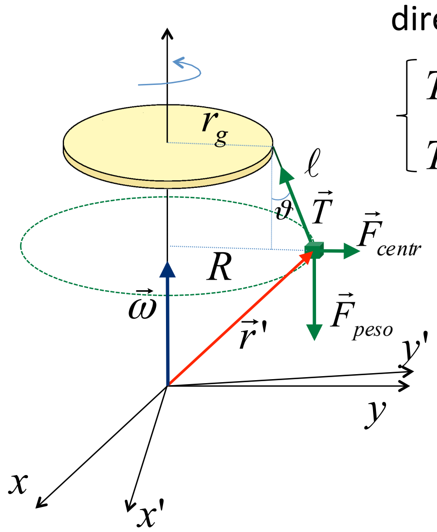
dove la forza centrifuga è ancora radiale e

$$\left|\vec{F}_{\text{centr}}\right| = m\omega^2 R$$

$$R = r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta$$

Piattaforma rotante

Decomponendo nelle due direzioni orizzontale e verticale:



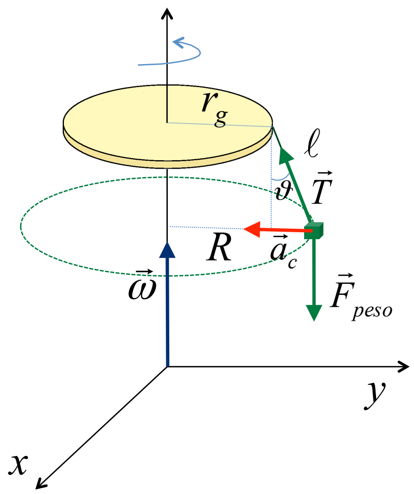
$$\begin{cases} T \sin \vartheta = m\omega^2 (r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta) \\ T \cos \vartheta = mg \end{cases}$$

Da queste si ottiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{(r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta)} = \frac{\omega^2}{g}$$

$$T = \frac{mg}{\cos \vartheta}$$

Piattaforma rotante



Cosa cambia se osserviamo la giostra dal sistema **inerziale?** la massa si muove di moto circolare uniforme. La forza peso e la tensione del filo devono produrre l'accelerazione centripeta

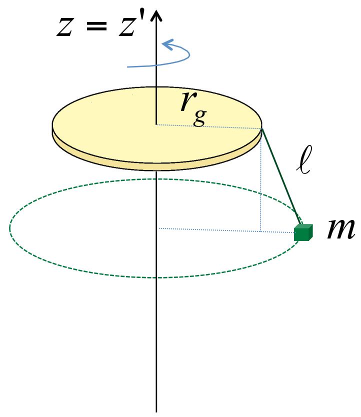
$$|\vec{a}_c| = \omega^2 R = \omega^2 (r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta)$$

Dunque

$$\begin{cases} T \sin \vartheta = m\omega^2 (r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta) \\ T \cos \vartheta = mg \end{cases}$$

Sono (ovviamente) le stesse equazioni di prima **!!**

Piattaforma rotante



L'equazione

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{(r_g + \ell \operatorname{sen} \vartheta)} = \frac{\omega^2}{g}$$

Fornisce la relazione tra l'angolo descritto dalla giostra rispetto alla verticale e la velocità di rotazione della giostra. Si noti che non dipende dalla massa **!!**

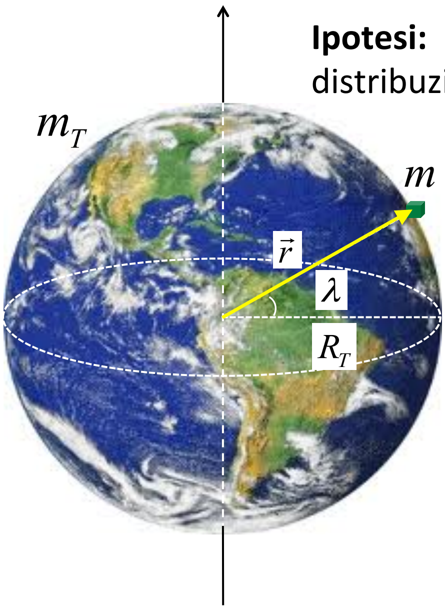
Piattaforma rotante

L' equazione

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{(r_g + \ell \operatorname{sen}\vartheta)} = \frac{\omega^2}{g}$$

Fornisce la relazione tra l' angolo descritto dalla giostra rispetto alla verticale e la velocità di rotazione della giostra. Si noti che non dipende dalla massa **!!**

La rotazione della terra e la forza centrifuga



Ipotesi: la terra sia una sfera, con distribuzione di massa isotropa.

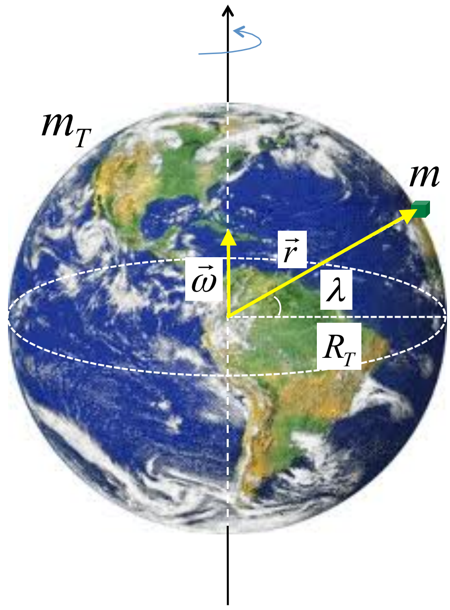
Allora un corpo di massa m posto sulla sua superficie sarà soggetto alla forza

$$\vec{F} = (-mg)\hat{r}$$

con

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2}$$

La rotazione della terra e la forza centrifuga

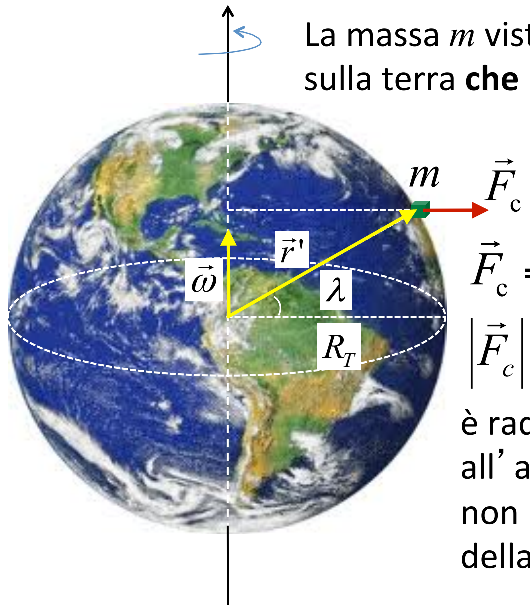


Ma la terra ruota sul suo asse.

Quale effetto produce questa rotazione **?**

La rotazione della terra e la forza centrifuga

La massa m vista nel **laboratorio** sulla terra **che ruota**:

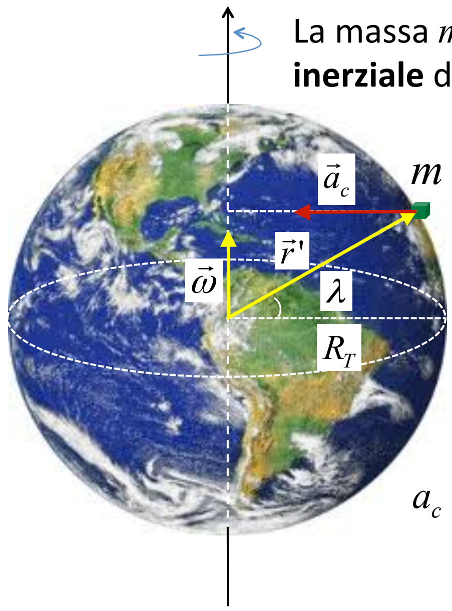


$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$\left|\vec{F}_c\right| = m\omega^2 R_T \cos\lambda$$

è radiale rispetto all'asse di rotazione e non rispetto al centro della terra!

La rotazione della terra e la forza centrifuga



La massa m vista nel sistema **inerziale** delle **stelle fisse**:

ruota attorno all'asse con accelerazione centripeta

$$a_c = \omega^2 R_T \cos\lambda$$

con

$$R_T = 6.35 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

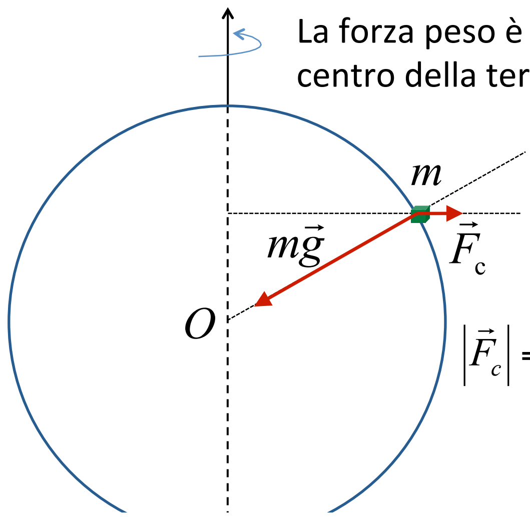
dunque

$$a_c = (3.4 \times 10^{-2} \text{m/s}^2) \cos\lambda$$

$$(a_c)_{\max} \cong 3 \times 10^{-3} g$$

La rotazione della terra e la forza centrifuga

La forza peso è radiale rispetto al centro della terra e in modulo è mg



La forza centrifuga è radiale rispetto all'asse di rotazione e in modulo è

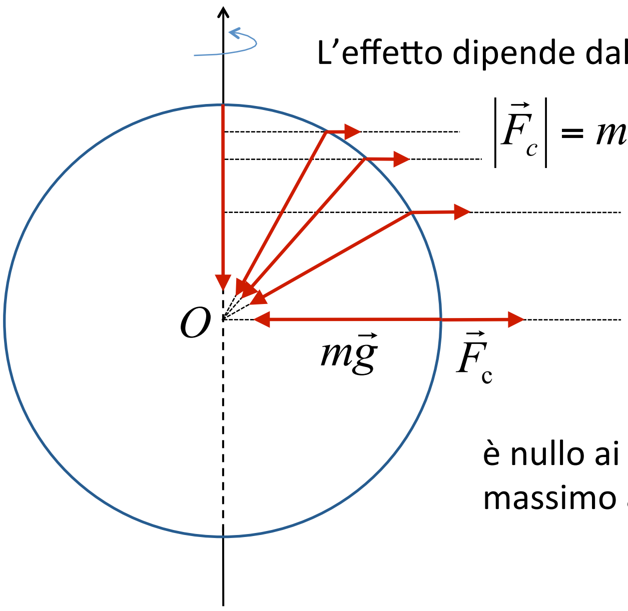
$$\left|\vec{F}_c\right| = m\omega^2 R_T \cos\lambda = ma_c$$

[*Nota: il rapporto tra le lunghezze delle frecce dovrebbe essere dell'ordine di 10^{-3}. Ma qui l'abbiamo esagerato apposta*]

La rotazione della terra e la forza centrifuga

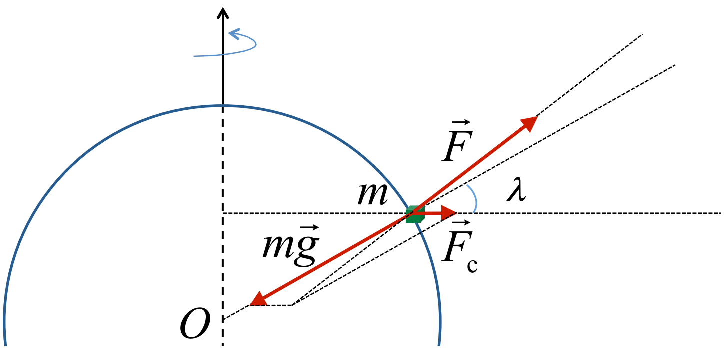
L'effetto dipende dalla latitudine

$$\left|\vec{F}_c\right| = m\omega^2 R_T \cos\lambda$$



è nullo ai poli e
massimo all' equatore.

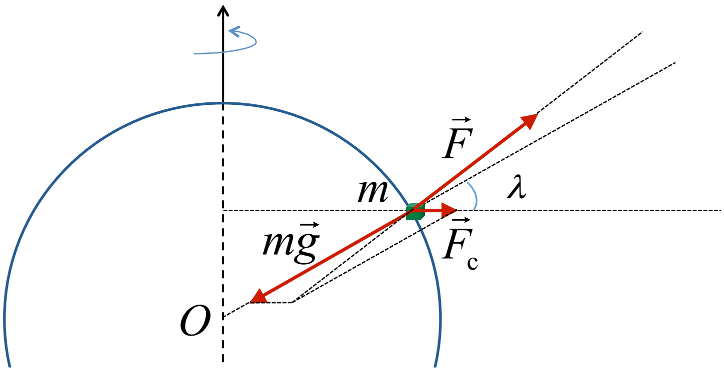
La rotazione della terra e la forza centrifuga



Affinché il corpo stia in equilibrio serve una terza forza (esempio: tensione di un filo a cui abbiamo appeso la massa, oppure la forza elastica di una molla, o la reazione vincolare esercitata da un piano di appoggio, ecc.) **!!**

$$\vec{F} = -(m\vec{g} + \vec{F}_c)$$

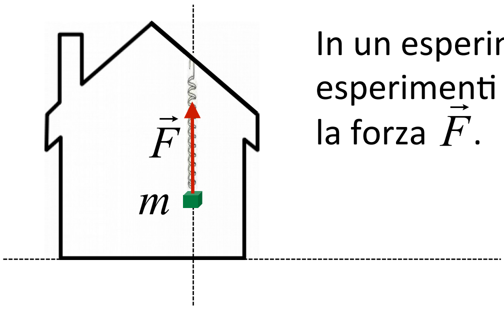
La rotazione della terra e la forza centrifuga



C'è qualcosa di strano: sembra che il filo a piombo debba essere inclinato rispetto alla verticale, e che la bilancia segni un peso $\left|\vec{F}\right| = mg' \neq mg$ **!!**

Ma cos'è la "verticale"? E cos'è il peso?

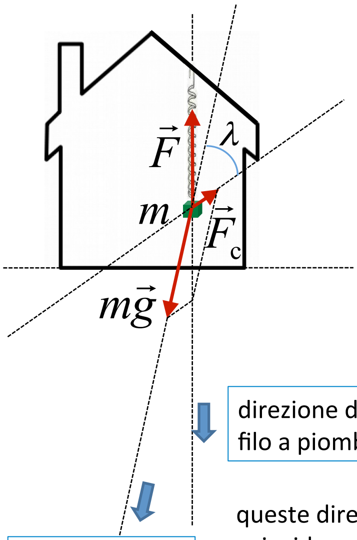
La rotazione della terra e la forza centrifuga



In un esperimento come questo, o esperimenti analoghi, noi misuriamo la forza $\vec{F}$.

Per definizione chiamiamo "verticale" la direzione della forza (la direzione del **filo a piombo**), mentre il modulo della forza, all'equilibrio, ci dà una misura del peso, o equivalentemente, dell'accelerazione g'.
La misura **non** ci dà informazioni dirette sul valore di g, nè sulla direzione radiale rispetto al centro della terra**!!**

La rotazione della terra e la forza centrifuga



direzione del filo a piombo

verso il centro della terra

queste direzioni coincidono solo ai poli e all'equatore.

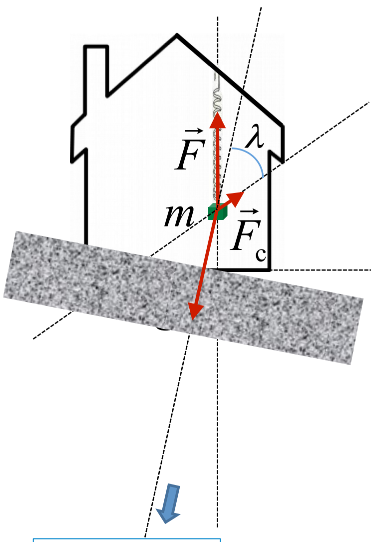
In pratica:
le case (le pareti, i pavimenti,...) sono costruite usando il filo a piombo, e le bilancia misura g':

$$\left|\vec{F}\right| \equiv mg' = m(g - \Delta g)$$

questo Δg è piccolo e dipende dalla latitudine. Ha valore massimo all'equatore, dove vale

$$(\Delta g)_{\max} = R_T \omega^2 \cong 0.034 \text{ m/s}^2$$

La rotazione della terra e la forza centrifuga



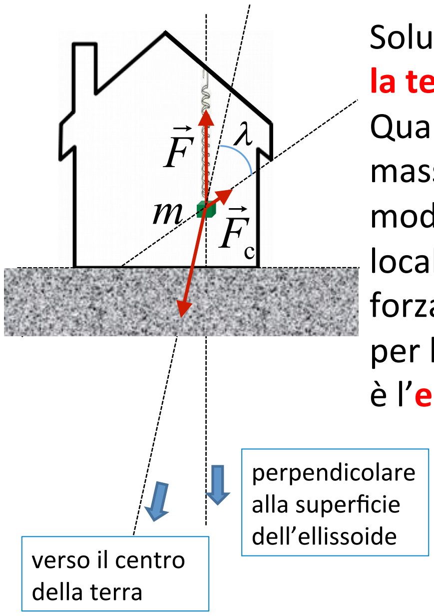
verso il centro della terra

Rimangono un paio di questioni da sistemare:

1) tranne ai poli e a all'equatore tutti gli edifici (i tralicci, gli alberi, ecc.) dovrebbero risultare inclinati rispetto alla superficie (locale) della terra. Non pare che sia così.

2) la variazione di g tra i poli e l'equatore dovrebbe essere 0.034 m/s^2. Invece è 0.052 m/s^2

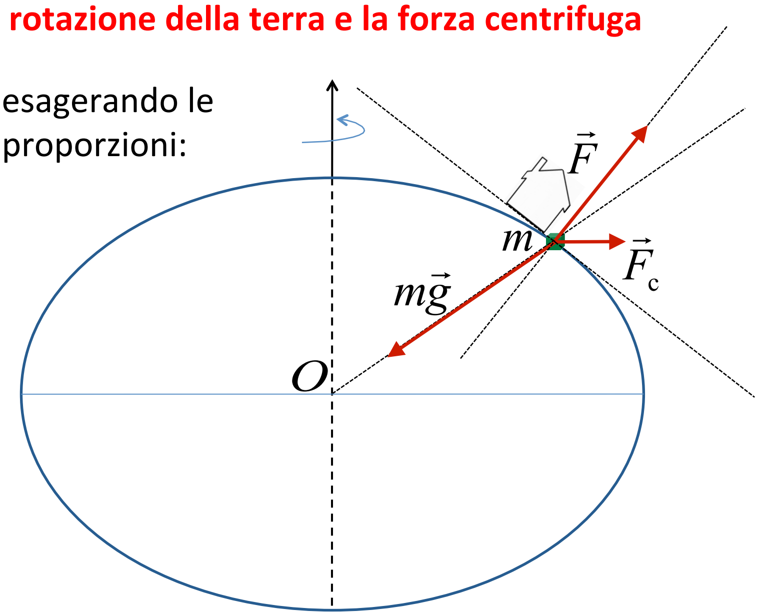
La rotazione della terra e la forza centrifuga



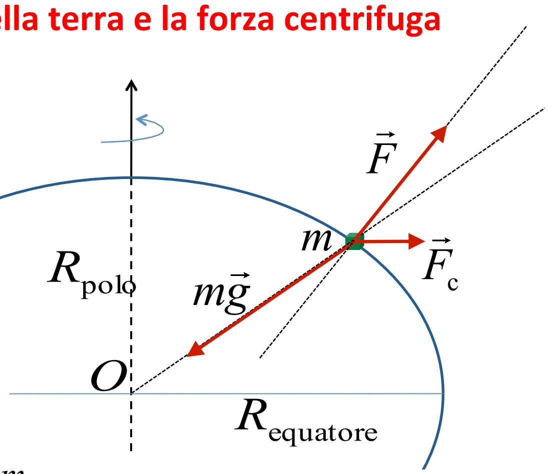
Soluzione ad entrambi i problemi:
la terra non è una sfera !!
Quando la crosta si è raffreddata, le masse fluide erano disposte in modo da controbilanciare localmente la forza di gravità e la forza centrifuga. La forma richiesta per l'equilibrio di queste due forze è l'**ellissoide di rotazione** !!

La rotazione della terra e la forza centrifuga

esagerando le proporzioni:



La rotazione della terra e la forza centrifuga



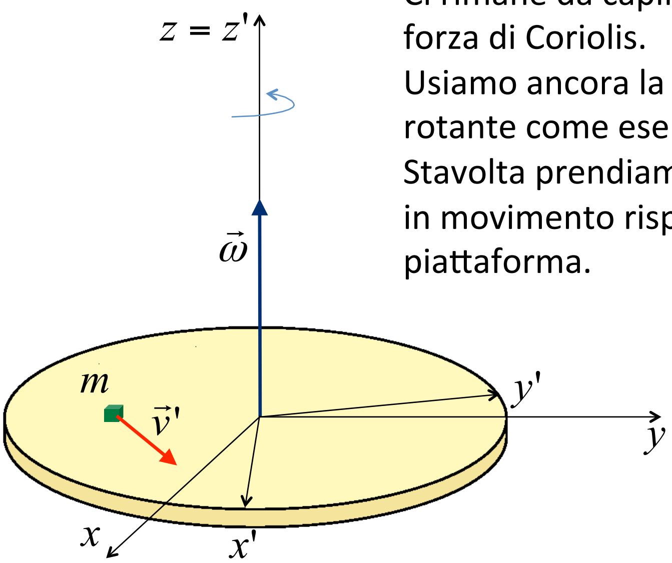
Le distanze dal centro sono pure diverse e quindi:

$$g_{polo} = \frac{Gm_T}{R^2_{polo}} > \frac{Gm_T}{R^2_{equatore}} = g_{equatore}$$

$$R_{equatore} \cong R_{polo} + 20\,\mathrm{Km}$$

e questo spiega la parte mancante di Δg, che si aggiunge all'effetto centrifugo.

Forza di Coriolis

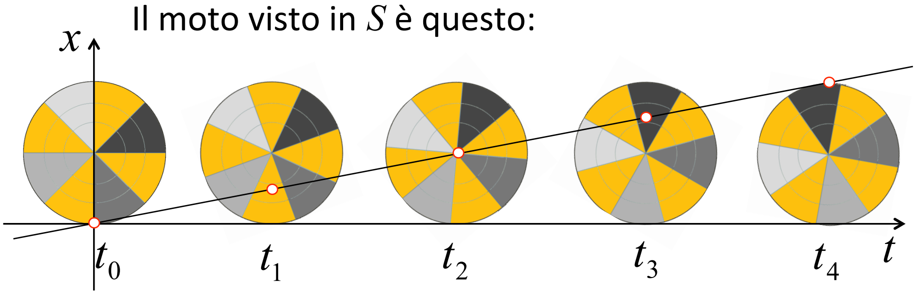


Ci rimane da capire cos'è la forza di Coriolis.
Usiamo ancora la piattaforma rotante come esempio.
Stavolta prendiamo particelle in movimento rispetto alla piattaforma.

Forza di Coriolis

Esempio: una particella libera in S (inerziale) transita con velocità v_0 costante sopra la piattaforma rotante.

Il moto visto in S è questo:

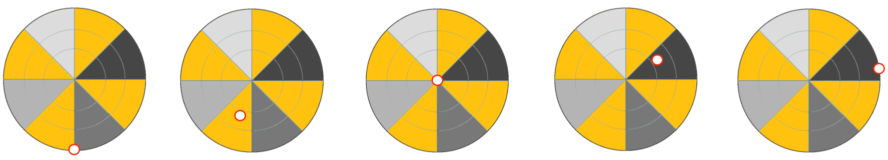


$$x(t) = v_0(t - t_0)$$

È il solito moto uniforme in un sistema inerziale.
Nel contempo, la piattaforma ruota.

Forza di Coriolis

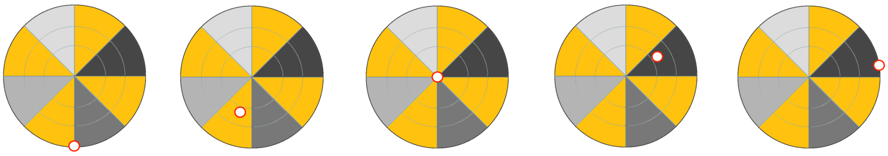
Il moto visto in S' invece è questo:



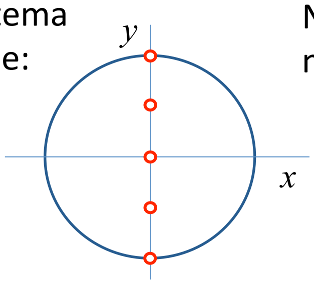
La piattaforma è ferma (l'osservatore è solidale con essa) e la particella compie una traiettoria curvilinea **!!**

Forza di Coriolis

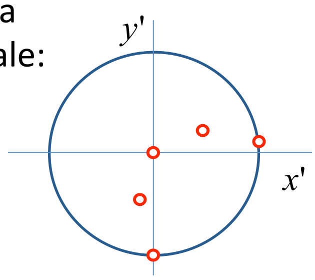
Il moto visto in S' invece è questo:



Nel sistema inerziale:

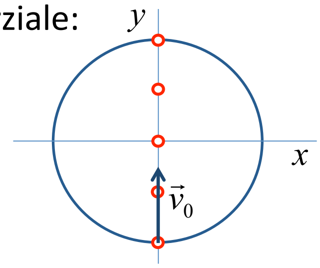


Nel sistema non inerziale:

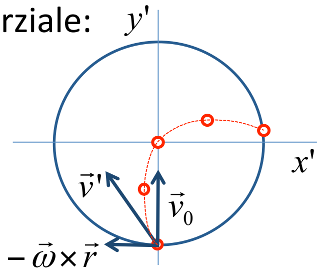


Forza di Coriolis

Nel sistema inerziale:



Nel sistema non inerziale:



La traiettoria curvilinea in S' può essere vista come l'effetto combinato della forza centrifuga e della forza di Coriolis. Quest'ultima è sempre **perpendicolare** a $\vec{v}'$ e sposta **lateralmente** la particella.

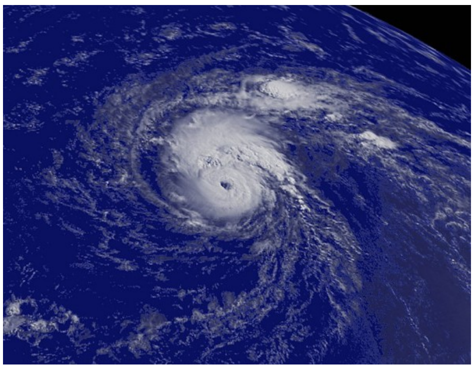
$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Forza di Coriolis

Altri esempi:
pendolo di Faucault

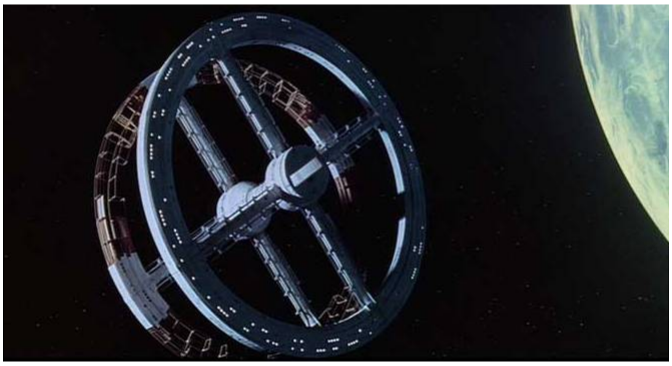
Forza di Coriolis

Altri esempi:
cicloni e anticicloni



Forza di Coriolis

Altri esempi:
la gravità artificiale in 2001 Odissea nello spazio



Esercizio

David Bowman sta facendo jogging lungo il corridoio dell'astronave Discovery in rotta verso Giove. Dopo alcuni giri decide di invertire il senso di percorrenza perchè si sente troppo affaticato. Cosa ci guadagna a farlo?