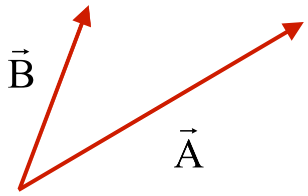
Parentesi matematica: prodotto vettoriale



$$\vec{A} \times \vec{B}$$

Prodotto tra vettori

due tipi di prodotti:

prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

è un numero (scalare)

già visto:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\alpha}$$

prodotto vettoriale

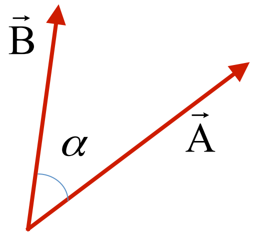
$$\vec{A} \times \vec{B}$$

è un vettore

questo lo definiamo adesso

Prodotto vettoriale di due vettori

$\vec{A} \times \vec{B}$



per definizione è il vettore che:

✓ ha direzione perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$

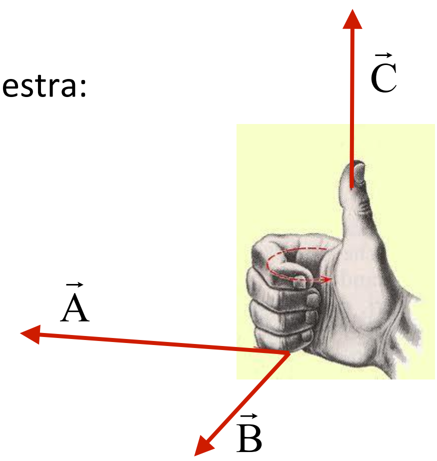
✓ ha verso fissato dalla regola della mano destra

✓ ha modulo $\boxed{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \operatorname{sen} \alpha}$

Prodotto vettoriale di due vettori

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

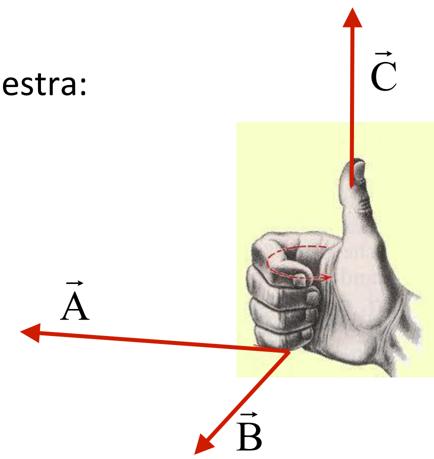
Regola della mano destra:



Prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Regola della mano destra:



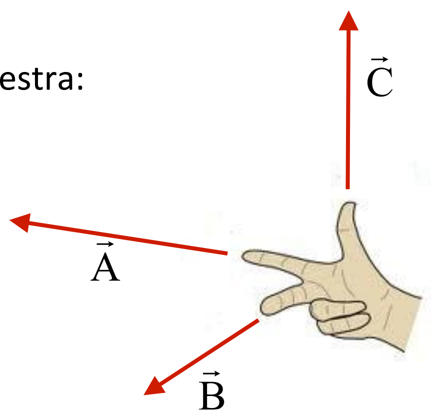
Nota: se si usasse la sinistra il verso sarebbe opposto. La scelta della destra è una convenzione (**destrorsa** o **destrogira**).

Prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Regola della mano destra:

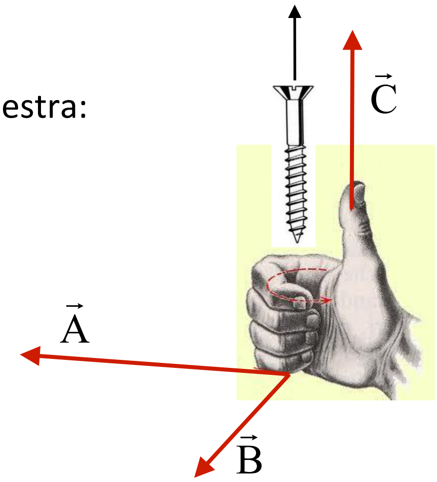
Un modo diverso di usarla è questo



Prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Regola della mano destra:

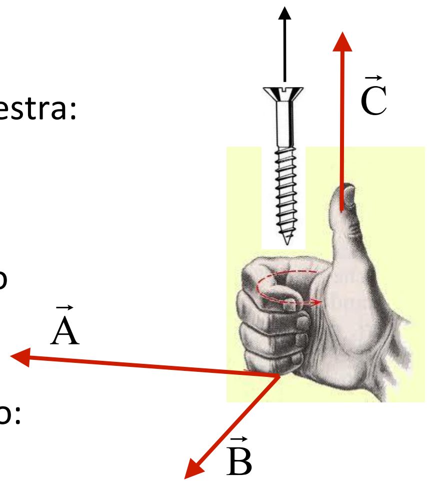


Nota: ruotando il primo vettore verso il secondo, la regola della mano destra riproduce anche il verso di avvitamento delle viti o dei cavatappi (stessa convezione destrogira)

Prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

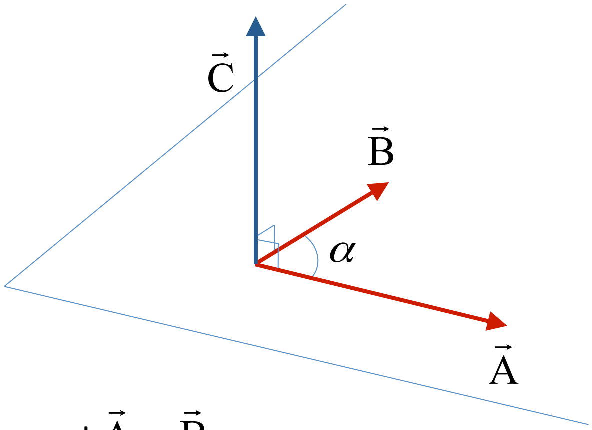
Regola della mano destra:



Importante: se si inverte l'ordine dei vettori (si gira B verso A, sempre con la mano destra), il pollice punta in verso opposto. Quindi il prodotto è anti-commutativo:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}}$$

Prodotto vettoriale di due vettori



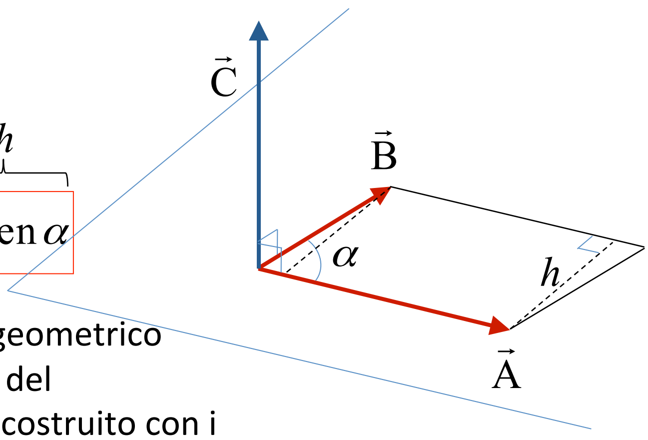
Ripetiamo la definizione:

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

è il vettore che:

- è perpendicolare ad $\vec{A}$ e $\vec{B}$
- ha verso fissato dalla regola della mano destra
- ha modulo $\boxed{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \operatorname{sen}\alpha}$

Prodotto vettoriale di due vettori



Il modulo

$$\boxed{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\overbrace{\left|\vec{B}\right| \operatorname{sen}\alpha}^{h}}$$

ha un significato geometrico semplice: è l'area del parallelogrammo costruito con i due vettori.

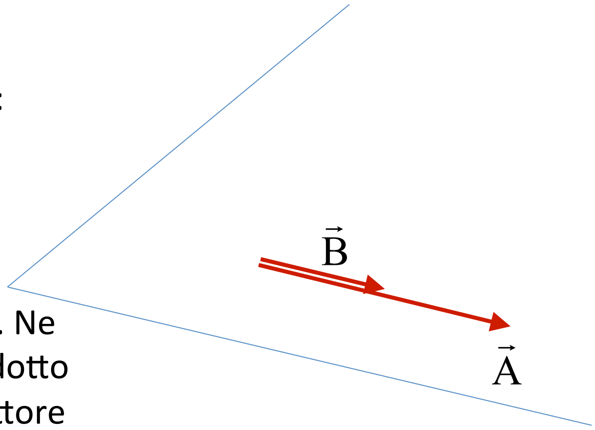
Prodotto vettoriale di due vettori

Caso particolare: se i vettori sono **paralleli**, allora

$\operatorname{sen}\alpha = 0$

e il modulo del prodotto è nullo. Ne segue che il prodotto vettoriale è il vettore nullo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$



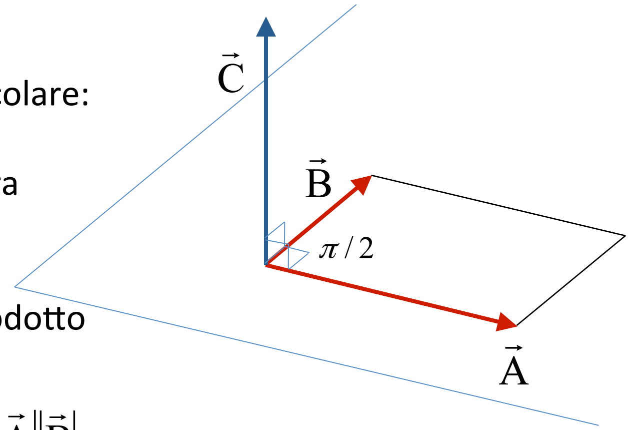
Prodotto vettoriale di due vettori

Altro caso particolare: se i vettori sono **ortogonali**, allora

$\operatorname{sen}\alpha = 1$

e il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli.

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$$



Prodotto vettoriale di due vettori

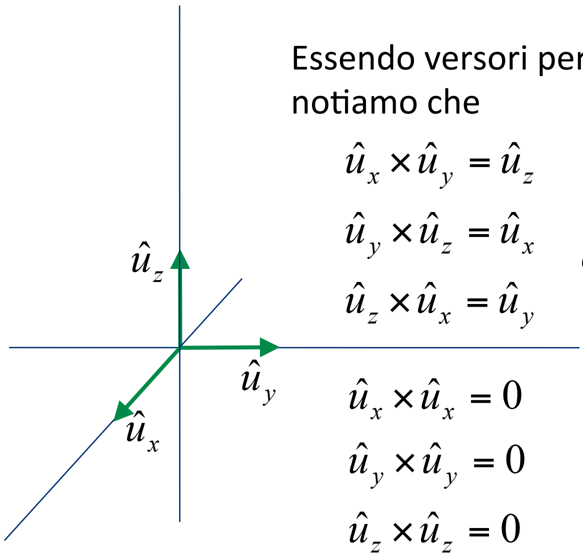
Altre proprietà importanti:

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

$$k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B})$$

Infine, possiamo esprimerlo in coordinate cartesiane.
Basta introdurre i soliti versori $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$.

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane



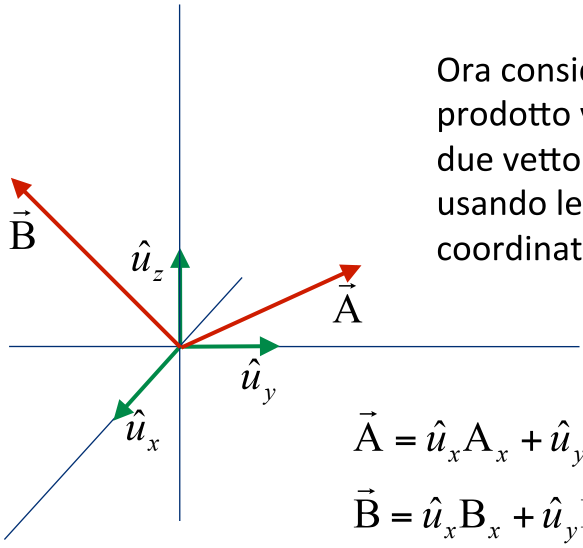
Essendo versori perpendicolari, notiamo che

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_y = \hat{u}_z$$
$$\hat{u}_y \times \hat{u}_z = \hat{u}_x$$
$$\hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y$$

[*occhio all'ordine degli indici!!*]

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_x = 0$$
$$\hat{u}_y \times \hat{u}_y = 0$$
$$\hat{u}_z \times \hat{u}_z = 0$$

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane



Ora consideriamo il prodotto vettoriale di due vettori generici, usando le loro coordinate catersiane

$$\vec{A} = \hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z$$
$$\vec{B} = \hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z$$

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z) \times (\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z)$$

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z)\times(\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z)$$
$$= \cancel{(\hat{u}_x \times \hat{u}_x)} A_x B_x + (\hat{u}_x \times \hat{u}_y) A_x B_y + (\hat{u}_x \times \hat{u}_z) A_x B_z$$
$$+ (\hat{u}_y \times \hat{u}_x) A_y B_x + \cancel{(\hat{u}_y \times \hat{u}_y)} A_y B_y + (\hat{u}_y \times \hat{u}_z) A_y B_z$$
$$+ (\hat{u}_z \times \hat{u}_x) A_z B_x + (\hat{u}_z \times \hat{u}_y) A_z B_y + \cancel{(\hat{u}_z \times \hat{u}_z)} A_z B_z$$

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z)\times(\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z)$$
$$= \cancel{(\hat{u}_x \times \hat{u}_x)} A_x B_x + (\hat{u}_x \times \hat{u}_y) A_x B_y + (\hat{u}_x \times \hat{u}_z) A_x B_z$$
$$+ (\hat{u}_y \times \hat{u}_x) A_y B_x + \cancel{(\hat{u}_y \times \hat{u}_y)} A_y B_y + (\hat{u}_y \times \hat{u}_z) A_y B_z$$
$$+ (\hat{u}_z \times \hat{u}_x) A_z B_x + (\hat{u}_z \times \hat{u}_y) A_z B_y + \cancel{(\hat{u}_z \times \hat{u}_z)} A_z B_z$$
$$= \hat{u}_z A_x B_y - \hat{u}_y A_x B_z - \hat{u}_z A_y B_x + \hat{u}_x A_y B_z + \hat{u}_y A_z B_x - \hat{u}_x A_z B_y$$
$$= \hat{u}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{u}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{u}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

[*notiamo che il segno "+" si ottiene nelle permutazioni pari degli indici x,y,z, e il segno "–" si ottiene nelle permutazioni dispari*]

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

Quindi le componenti cartesiane del vettore prodotto sono le seguenti:

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = A_zB_x - A_xB_z$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_xB_y - A_yB_x$$

e per chi sapesse già cos'è il determinante di una matrice:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

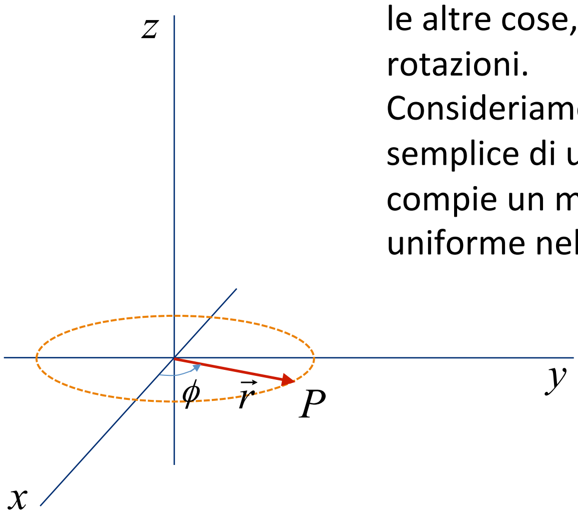
Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane

Quindi le componenti cartesiane del vettore prodotto sono le seguenti:

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = A_zB_x - A_xB_z$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_xB_y - A_yB_x$$

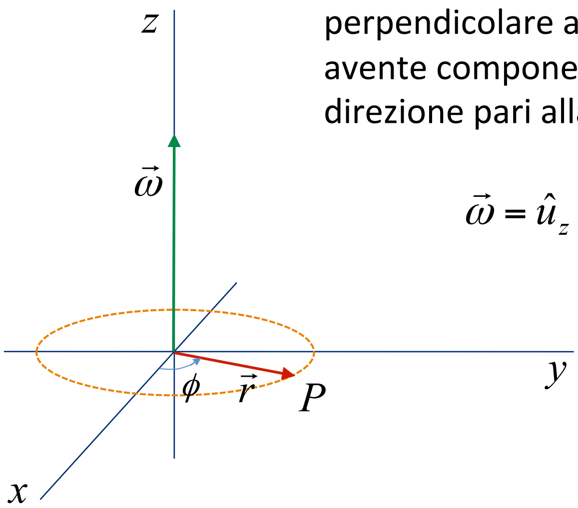
da qui si vede bene anche il fatto che il prodotto vettoriale è perpendicolare ai vettori dati. Ad esempio, se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno componente z nulla (stanno nel piano $x\,y$), automaticamente il loro prodotto vettoriale ha solo componente z.

Prodotto vettoriale e rotazioni



Il prodotto vettoriale è utile, tra le altre cose, per rappresentare rotazioni.
Consideriamo il caso più semplice di una particella che compie un moto circolare uniforme nel piano xy.

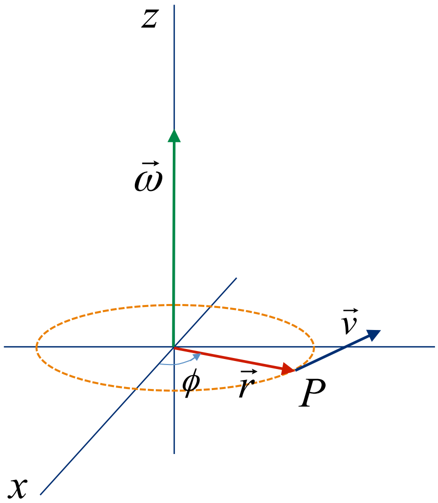
Prodotto vettoriale e rotazioni



Introduciamo un nuovo vettore $\vec{\omega}$ perpendicolare al piano dell'orbita e avente componente in quella direzione pari alla velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \hat{u}_z \frac{d\phi}{dt}$$

Prodotto vettoriale e rotazioni



Ci chiediamo cos'è il prodotto vettoriale

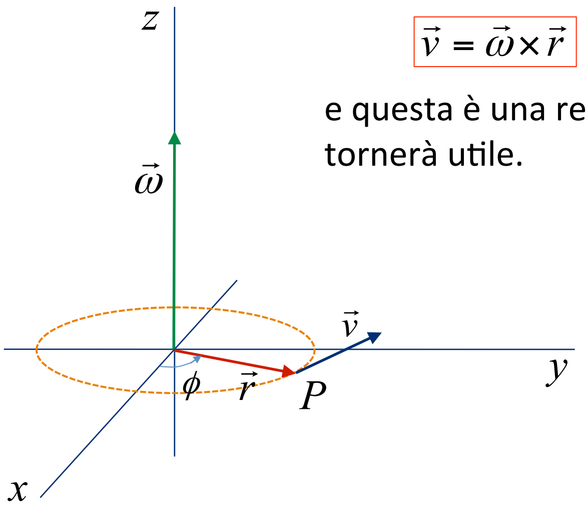
$$\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Per definizione è perpendicolare a entrambi ed ha modulo

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right| = \omega r$$

Ma un vettore così è proprio il vettore velocità della particella **!!**

Prodotto vettoriale e rotazioni

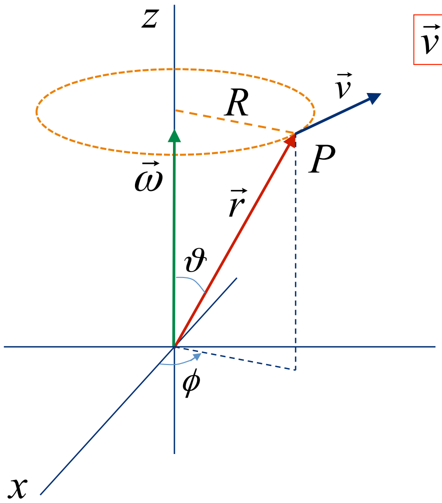


Dunque

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

e questa è una relazione che tornerà utile.

Prodotto vettoriale e rotazioni



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

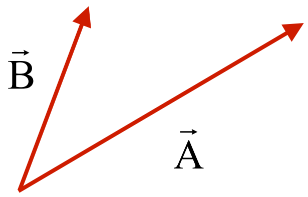
Notiamo che vale anche se l'orbita sta in qualsiasi piano parallelo al piano xy.

Infatti, direzione e verso non cambiano e inoltre:

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega r \,\mathrm{sen}\vartheta = \omega R$$

Parentesi matematica: prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B}$$



e questo è tutto quello che ci serve sul prodotto vettoriale. Possiamo chiudere la parentesi matematica e riprendere il discorso sui sistemi accelerati.