Lavoro e energia

Lavoro compiuto da una forza

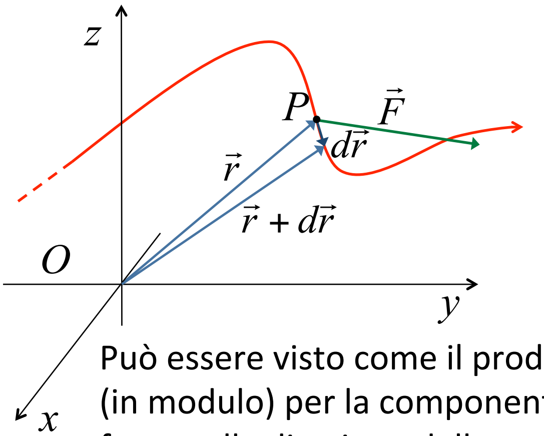
Cominciamo dall'idea intuitiva che spostare un'oggetto applicandovi una forza è un lavoro che costa una fatica, tanto più è grande la forza necessaria per produrre lo spostamento e quanto più è grande lo spostamento.

Vogliamo darne una misura quantitativa in termini di "grandezza fisica".

[*nota storica: l'importanza della misura del "lavoro" in termini meccanici è emersa con l'avvento delle macchine a vapore nella prima rivoluzione industriale*]

Lavoro compiuto da una forza

Consideriamo una particella che compie uno spostamento infinitesimo essendo soggetta ad una forza.



Definiamo il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza come

$$\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

È uno scalare.

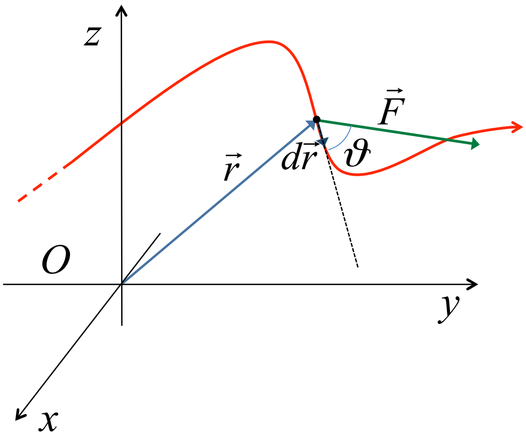
Può essere visto come il prodotto dello spostamento (in modulo) per la componente (con segno) della forza nella direzione dello spostamento.

Lavoro compiuto da una forza

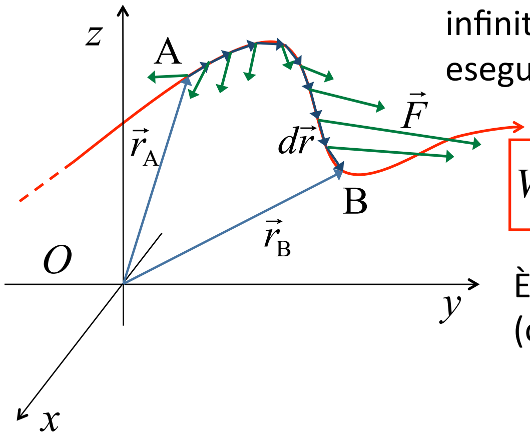
$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos\vartheta$$

Il lavoro è massimo se la forza è parallela allo spostamento.

È nullo se la forza è perpendicolare allo spostamento.



Lavoro compiuto da una forza

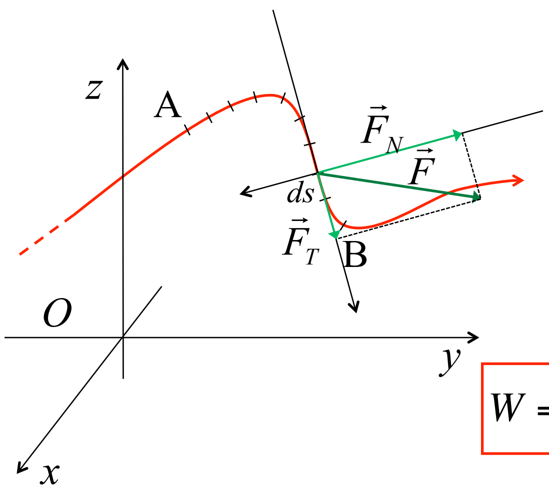


Il lavoro compiuto dalla forza in uno spostamento finito si ottiene sommando i lavori infinitesimi (elementari) eseguiti lungo la traiettoria:

$$\boxed{W = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

È un integrale di percorso (o integrale di linea).

Lavoro compiuto da una forza



Possiamo usare le coordinate intrinseche per scrivere

$$d\vec{r} = \hat{u}_T ds$$

$$\vec{F} = \hat{u}_T F_T + \hat{u}_N F_N$$

da cui

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_T\, ds$$

e l'integrale diventa

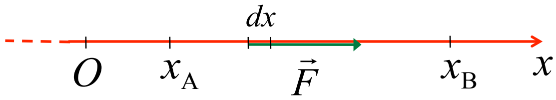
$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_T\, ds}$$

Lavoro compiuto da una forza

Caso semplice: moto 1D con forza costante, parallela allo spostamento.

$$d\vec{r} = \hat{u}_x dx$$
$$\vec{F} = \hat{u}_x F$$

$$\boxed{W = \int_{x_A}^{x_B} F\,dx = F(x_B - x_A) = F\Delta x}$$

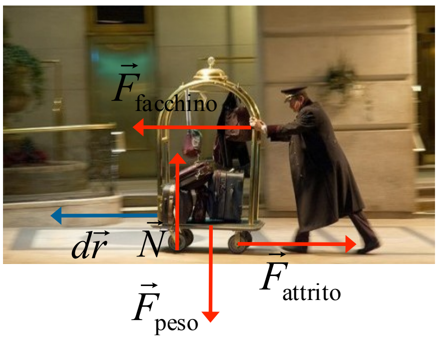


Forza per spostamento!

Più in generale occorre tenere conto della direzione della forza rispetto allo spostamento e della variazione della forza lungo il percorso.

Lavoro compiuto da una forza

Qui le forze sul carrello sono almeno quattro:
- la forza peso, che non lavora perchè perpendicolare la moto;
- la reazione vincolare del pavimento, che non lavora per lo stesso motivo;
- la forza esercitata dal facchino, che compie un lavoro positivo;
- l'attrito, che si oppone al moto.

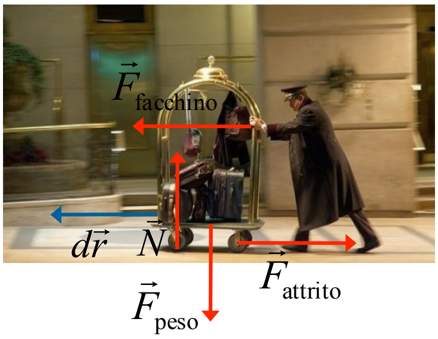


Se la velocità è tenuta costante, significa che la forza esercitata dal facchino è esattamente uguale e opposta all'attrito e il lavoro corrispondente è anch'esso uguale in modulo ma di segno opposto.

Lavoro compiuto da una forza

Se nel tempo dt il carrello si sposta di $d\vec{r}$, il facchino compie un lavoro

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



ma lo spostamento può essere scritto tramite la velocità

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

e il lavoro compiuto nell'unità di tempo diventa:

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Questa si chiama **potenza**.

Lavoro compiuto da una forza

Per come sono stati definiti, il lavoro $\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$
e la potenza $\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

hanno le dimensioni, rispettivamente, di forza (N) per spostamento (m), e di forza (N) per velocità (m/s).
Storicamente si sono introdotte unità di misura apposite:

1 Joule (J) = 1 Nm = 1 Kg m^2/s^2

1 Watt (W) = 1 Nm/s = 1 J/s

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Fin qui ci siamo limitati a definire due nuove grandezze, senza dire a cosa servono. Ora cominciamo a vedere come utilizzarle.

Consideriamo una particella di massa m che si muove da un punto A ad un punto B sotto l'azione di **una sola** forza.

Partiamo dalla definizione di lavoro compiuto dalla forza

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e applichiamo la seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Otteniamo

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

dalla seconda legge di Newton

dalla definizione di accelerazione

dalla definizione di velocità

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Otteniamo

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} m\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}\,dt$$

$$= m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{v}\cdot d\vec{v} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{v_{\mathrm{A}}}^{v_{\mathrm{B}}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

dalle proprietà matematiche degli integrali (cambiamento di variabile)

Questa la chiamiamo energia cinetica

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2}$$

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Abbiamo ottenuto

$$W_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_K(\mathrm{B}) - E_K(\mathrm{A}) = \Delta E_K$$

il lavoro compiuto dalla forza per spostare la particella dal punto A al punto B è uguale alla variazione di energia cinetica della particella

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta E_K}$$

Questo è noto come teorema delle forze vive.

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Abbiamo assunto che la particella fosse soggetta all'azione di **una sola forza**. E se si fossero più forze**?**
Nessun problema**!** L'ipotesi serviva solo per legare la forza all'accelerazione usando la seconda legge. Si può fare anche con più forze, purché il lavoro calcolato sia quello della **risultante** delle forze, per cui vale ancora $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta E_K}$$

il lavoro compiuto dalla **risultante** delle forze che agiscono su una particella che si sposta dal punto A al punto B è uguale alla variazione di energia cinetica della particella.

Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta E_K}$$

Da dove viene ?
Nella nostra formulazione della teoria è una conseguenza diretta
1. delle definizioni di lavoro e energia cinetica;
2. della seconda legge di Newton.

In tal senso, non contiene nuova fisica. Tuttavia è **importante** perché, come vedremo, apre le porte ad una formulazione alternativa del problema del moto.

Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta E_K}$$

Perché è interessante a prima vista ?

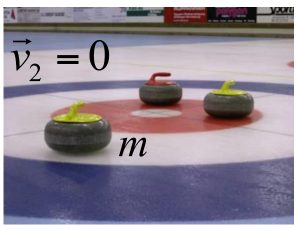
Perché mette in relazione una grandezza associata allo stato dinamico di una particella (l'energia cinetica) con una grandezza associata alle forze che agiscono sulla particella durante il suo moto (il lavoro).

Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \Delta E_K}$$

Esempio:

$\vec{v}_1$ m t_1



$\vec{v}_2 = 0$ m t_2

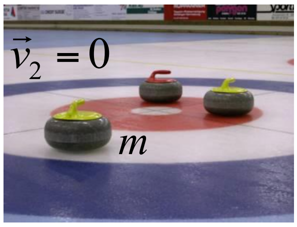
$$E_{K1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad E_{K2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = 0$$

$$\Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$W = \Delta E_K = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

$\vec{v}_1$

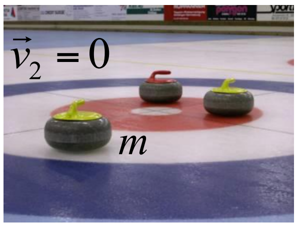


Per calcolare il lavoro fatto dalla forza di attrito (l'unica che lavora in questo caso) non serve risolvere l'equazione del moto e integrare la forza lungo la traiettoria **!** Basta conoscere il modulo della velocità iniziale **!!!**

Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$W = \Delta E_K = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

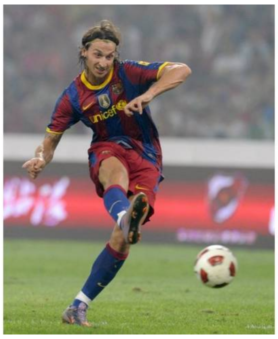
$\vec{v}_1$



Nota: il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è negativo, dato che a forza ha sempre verso opposto alla velocità.

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Ibrahimovic tira una punizione e il pallone schizza via alla velocità di 124 Km/h. L'energia cinetica del pallone appena tirato è

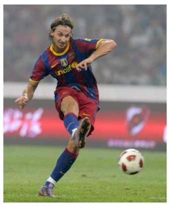


$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= (1/2)(450\,\mathrm{g})(124\,\mathrm{Km/h})^2 \\ &= (1/2)(0.45\,\mathrm{Kg})(34.4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 267\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Questo è il lavoro fatto dal piede di Ibrahimovic. Ed è anche il lavoro da fare per fermare il pallone dopo il tiro.

Energia cinetica e teorema delle forze vive

A parità di velocità iniziale (circa 34 m/s), il lavoro da fare per fermare…



il pallone	un'automobile	un treno
$m \approx 4\times10^{-1}\,\mathrm{Kg}$	$m \approx 10^{3}\,\mathrm{Kg}$	$m \approx 6\times10^{5}\,\mathrm{Kg}$
$E_K \approx 2\times10^{2}\,\mathrm{J}$	$E_K \approx 5\times10^{5}\,\mathrm{J}$	$E_K \approx 3\times10^{8}\,\mathrm{J}$

Energia cinetica e teorema delle forze vive

Notiamo che, se $\vec{F}$ è la risultante delle forze che agiscono su una particella, allora

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_K$$

La variazione di energia cinetica è uguale al lavoro.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \Delta \vec{p}$$

La variazione di quantità di moto è uguale all'impulso.

Corrispondono a modi diversi di esprimere la seconda legge di Newton, tramite un'integrazione nello spazio e nel tempo.

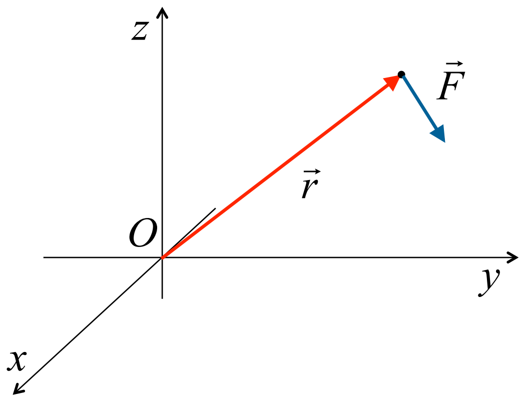
Energia cinetica e teorema delle forze vive

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se vogliamo calcolare il lavoro a partire dalla definizione, dobbiamo conoscere la forza punto per punto e la traiettoria seguita dalla particella. Sembra quindi necessario risolvere **prima** l'equazione del moto e **poi** calcolare il lavoro.
Ma allora, come può il concetto di lavoro essere utile a **risolvere** il problema del moto?
Per capirlo conviene definire le **forze conservative** e per cominciare introduciamo i **campi di forze**.

Campi di forze

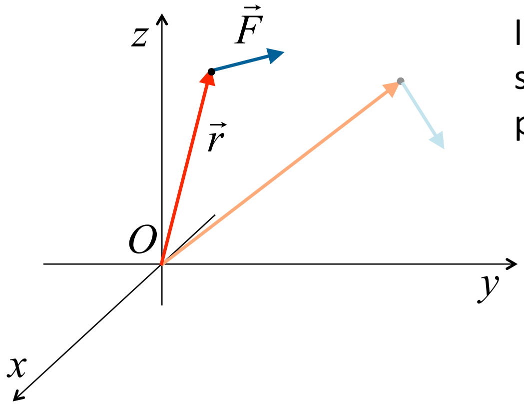
Consideriamo una particella che interagisce con altre particelle. Fotografiamo la situazione in un istante generico assegnato. La particella sente una forza che dipende dalla sua posizione in quell'istante.



Campi di forze

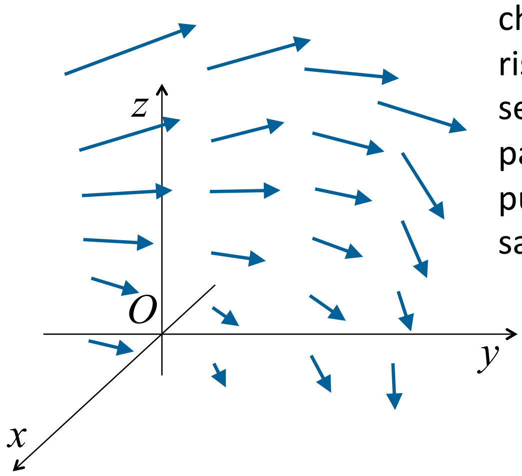
Se nello stesso istante la particella si trovasse in un altro punto, risentirebbe di una forza diversa.

In generale, possiamo immaginare di tracciare la forza che la particella sentirebbe in **qualsiasi** punto dello spazio.



Campi di forze

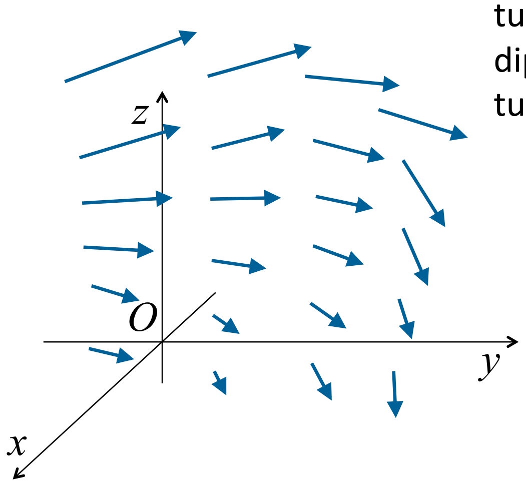
L'insieme delle forze così tracciate è un **campo di forze**.



Un campo di forze è ciò che permette di rispondere alla domanda: se mettessimo la particella in un dato punto, a quale forza sarebbe soggetta?

Campi di forze

Non tutte le forze ammettono una rappresentazione in termini di campo di forze.

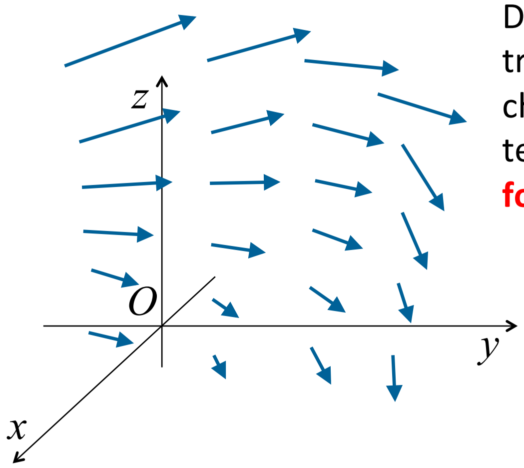


Sono escluse, ad esempio, tutte le forze che dipendono dalla velocità e tutti gli attriti in genere.

Una particella può essere soggetta contemporaneamente a forze rappresentabili con campi e altre che non lo sono.

Campi di forze

I campi di forze possono dipendere dal **tempo**, nel senso che la fotografia delle forze ad un istante diverso può essere diversa.

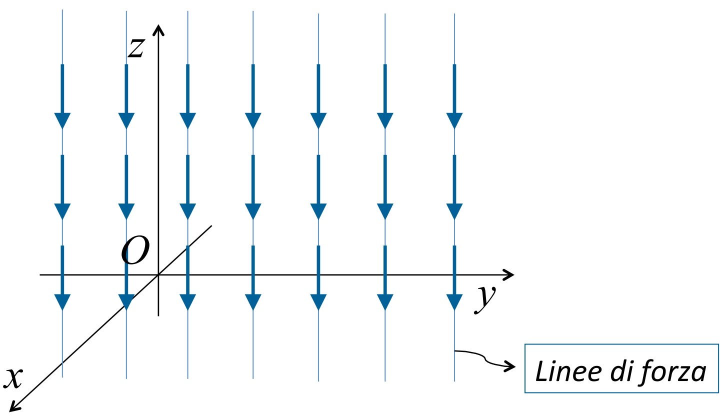


D'ora in poi, però, tratteremo solo campi che **non** dipendono dal tempo. Consideriamo **forze posizionali**:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

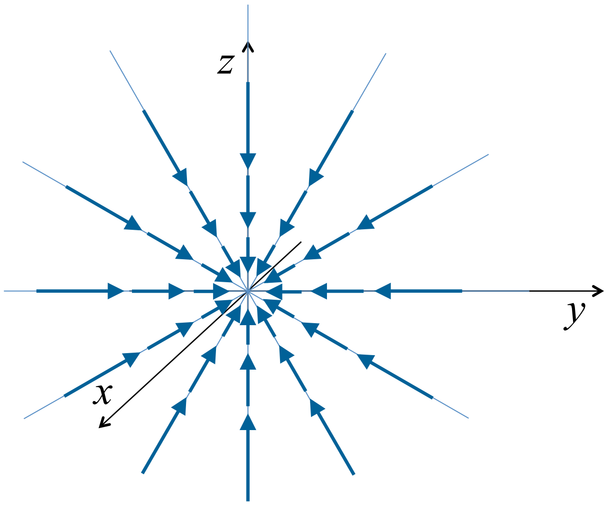
Campi di forze

Esempio: forza peso $\vec{F} = -mg\,\hat{k}$



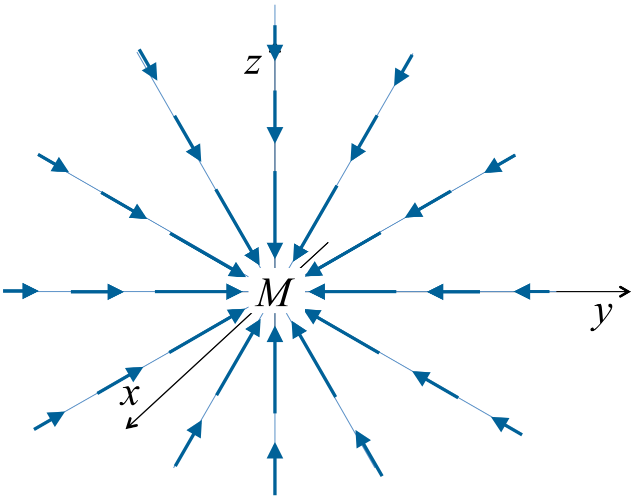
Campi di forze

Esempio: forza elastica $\vec{F} = -k r \hat{u}_r$



Campi di forze

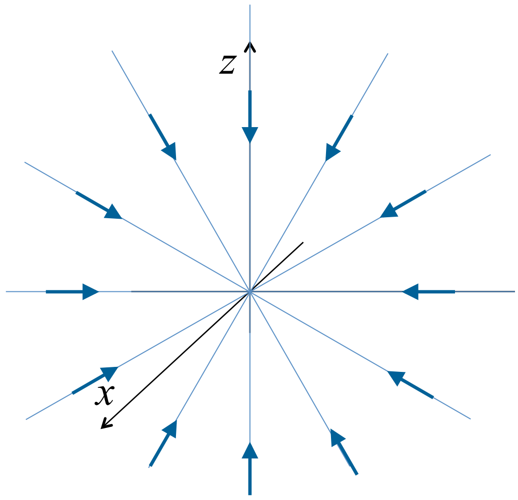
Esempio: forza gravitazionale $\vec{F} = -G \dfrac{mM}{r^2} \hat{u}_r$



Campi di forze

Gli ultimi due sono esempi di **forze centrali**. I campi di forze centrali sono quelli per cui vale

$$\boxed{\vec{F} = f(r)\,\hat{u}_r}$$



Sono radiali e isotrope (il modulo dipende solo dalla distanza dalla sorgente del campo).

Campi di forze conservative

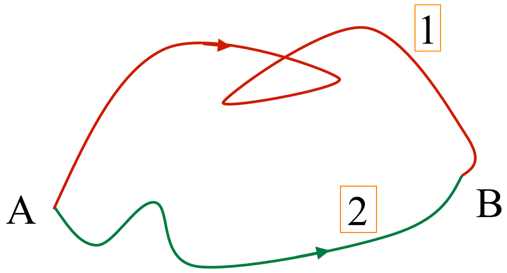
Ora che sappiamo cos'è un campo di forze, possiamo definire un sottoinsieme di campi, quelli conservativi.

Un campo di forze è conservativo se la forza dipende solo dalla posizione e se il lavoro

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

è indipendente dal percorso seguito dalla particella per muoversi dal punto A al punto B.

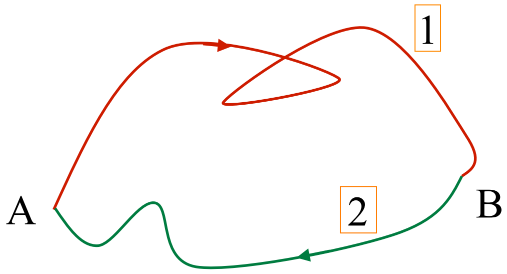
Campi di forze conservative



Se la forza è conservativa, allora

$$W_{AB} = \underset{\boxed{1}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{\boxed{2}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; \underset{\boxed{1}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \underset{\boxed{2}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Campi di forze conservative



Invertendo uno dei due percorsi:

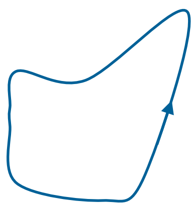
$$0 = \underset{\boxed{1}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \underset{\boxed{2}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{\boxed{1}}{\int_{A}^{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underset{\boxed{2}}{\int_{B}^{A}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ovvero: $\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$ *Integrale di linea su un percorso chiuso*

Campi di forze conservative

Definizione equivalente alla precedente:

Un campo di forze è conservativo se la forza dipende solo dalla posizione e se il lavoro compiuto lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo.



$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

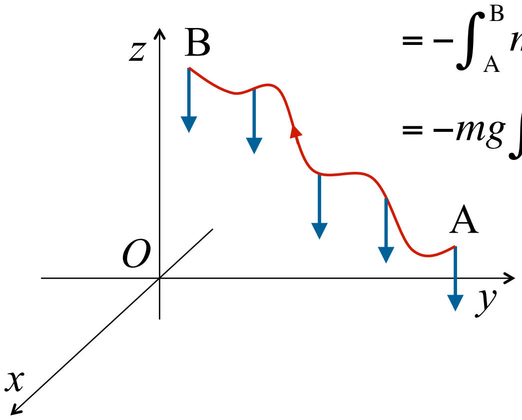
Campi di forze conservative

Esempio: la forza peso è conservativa

$$\vec{F} = -mg\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{A}^{B} mg\hat{k} \cdot (\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz)$$

$$= -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A)$$



Dipende solo dalla variazione di quota, non dal percorso **!**

Campi di forze conservative

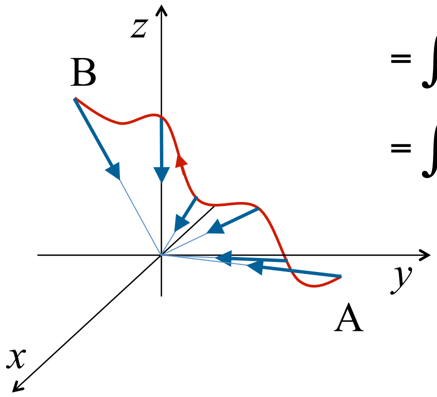
Altro esempio: tutte le forze centrali sono conservative

$$\vec{F} = f(r)\hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B f(r)\hat{u}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} f(r)dr$$

Spostamento radiale (variazione infinitesima di distanza da O)



Dipende solo dalla variazione di distanza dalla sorgente del campo, non dal percorso **!**

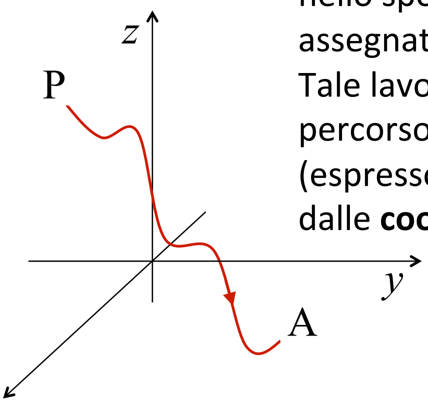
Campi di forze conservative

Contro-esempio: gli attriti non sono forze conservative. Non costituiscono un campo di forze (non sono posizionali).

Ma perché è importante distinguere tra forze conservative e forze non conservative **?**

Campi di forze conservative

Consideriamo una particella soggetta ad un campo di forze conservative. Scegliamo convenzionalmente un punto P fisso nello spazio e calcoliamo il lavoro fatto dalle forze del campo nello spostare la particella dal punto P assegnato ad un punto A generico. Tale lavoro **non** dipenderà dal percorso e dunque sarà un numero (espresso in Joule) che dipende **solo** dalle **coordinate del punto A**.



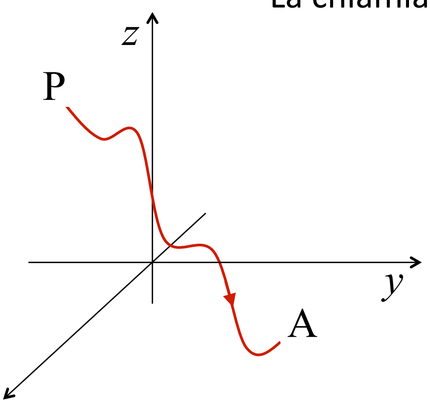
Al variare di A si ottiene una funzione delle coordinate.

Energia potenziale

Definiamo la funzione $U(\vec{r})$ tale che il suo valore in A sia:

$$U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -W_{\mathrm{PA}} = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

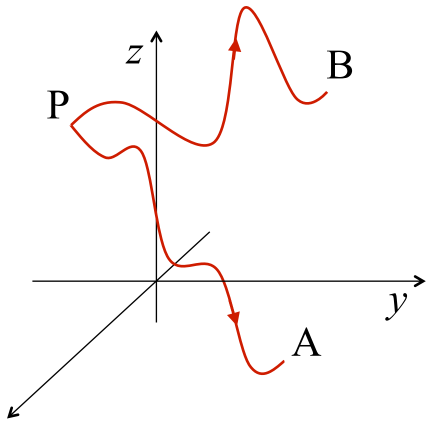
La chiamiamo energia potenziale.



Energia potenziale

Per un altro punto generico B si avrà per definizione

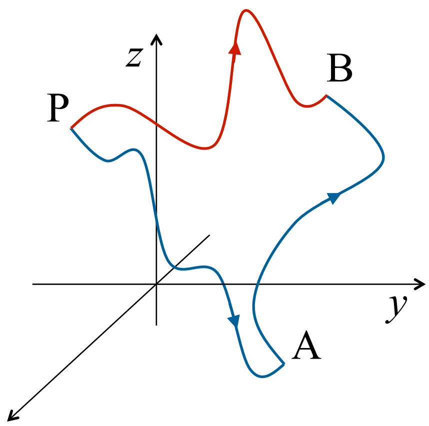
$$U(\vec{r}_B) = -W_{PB} = -\int_P^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Energia potenziale

Per un altro punto generico B si avrà per definizione

$$U(\vec{r}_B) = -W_{PB} = -\int_P^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

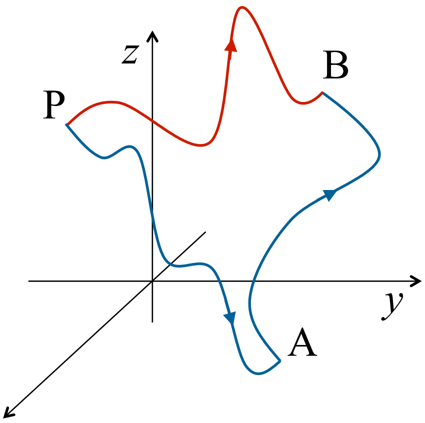


Dato che l'integrale non dipende dal percorso possiamo calcolarlo andando da P a B, ma passando per A.

Energia potenziale

quindi

$$U(\vec{r}_{\mathrm{B}}) = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



ovvero

$$U(\vec{r}_{\mathrm{B}}) = U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

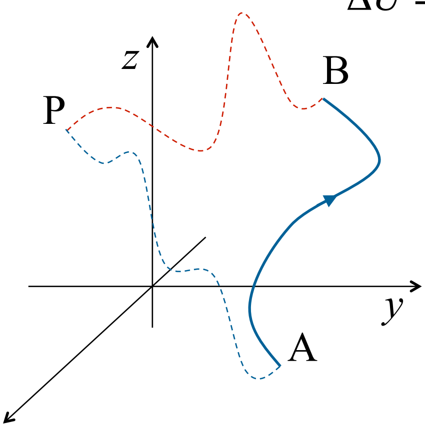
Infine

$$U(\vec{r}_{\mathrm{B}}) - U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Energia potenziale

Concludiamo che la **variazione di energia potenziale** tra due punti A e B è uguale a meno il lavoro fatto dalle forze del campo per portare la particella da A a B

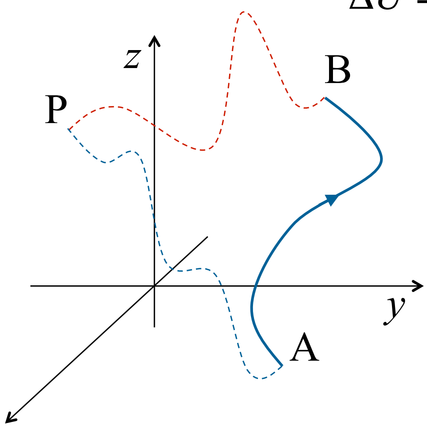
$$\Delta U = U(\vec{r}_{\mathrm{B}}) - U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Energia potenziale

Concludiamo che la **variazione di energia potenziale** tra due punti A e B è uguale a meno il lavoro fatto dalle forze del campo per portare la particella da A a B

$$\Delta U = U(\vec{r}_{\mathrm{B}}) - U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



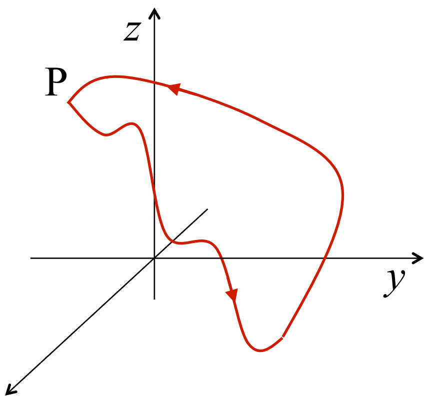
Ma qual è il ruolo del punto P **?**

Energia potenziale

Dalla definizione di $U(\vec{r})$ segue che

$$U(\vec{r}_{\mathrm{P}}) = -W_{\mathrm{PP}} = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

essendo la forza conservativa. Dunque il punto P è un punto arbitrariamente scelto come riferimento per il calcolo di U e nel quale l'energia viene posta convenzionalmente uguale a zero.



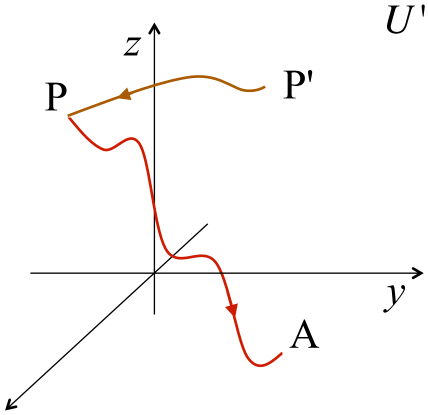
Ma se avessimo scelto un punto diverso?

Energia potenziale

Usando il nuovo riferimento definiamo

$$U'(\vec{r}_\mathrm{A}) = -W_{\mathrm{P'A}} = -\int_{\mathrm{P'}}^{\mathrm{A}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ma questo equivale a



$$U'(\vec{r}_\mathrm{A}) = -\int_{\mathrm{P'}}^{\mathrm{P}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= U'(\vec{r}_\mathrm{P}) - \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

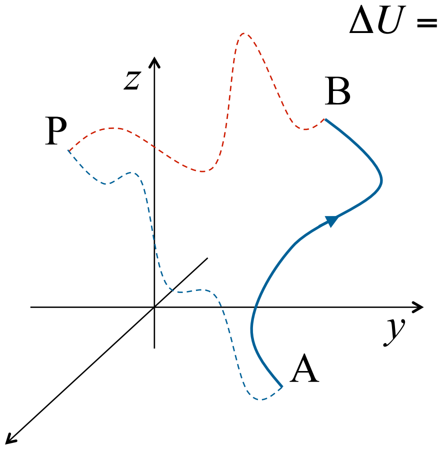
$$= U'(\vec{r}_\mathrm{P}) + U(\vec{r}_\mathrm{A})$$

Differiscono solo per una costante additiva $U'(\vec{r}_\mathrm{P})$

Energia potenziale

Scegliere punti di riferimento diversi equivale a variare l'energia potenziale di una **costante additiva**. La costante sparisce nell'espressione

$$\Delta U = U(\vec{r}_\mathrm{B}) - U(\vec{r}_\mathrm{A}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

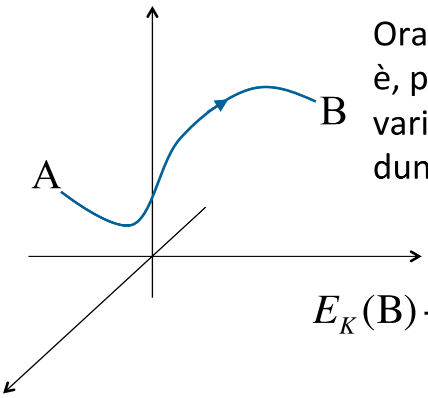


Dunque, l'energia potenziale è sempre nota a meno di una costante, ma questo non è un problema se siamo interessati solo a variazioni di energia **!!**

Energia meccanica

A cosa può servire l'energia potenziale così definita?

Supponiamo che una particella sia soggetta **solo** ad forze **conservative** e ricordiamoci il **teorema delle forze vive**: $\Delta E_K = W_{\mathrm{AB}}$



Ora sappiamo anche che il lavoro è, per definizione, meno la variazione di energia potenziale, e dunque $\Delta E_K = -\Delta U$

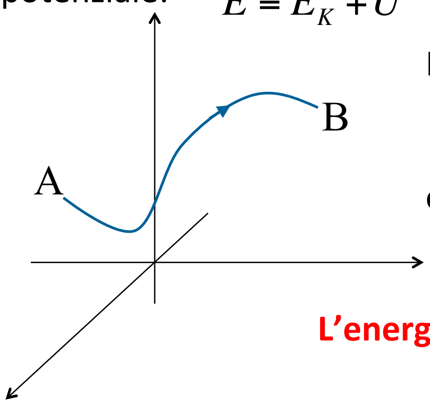
ovvero:

$$E_K(\mathrm{B}) - E_K(\mathrm{A}) = -[U(\mathrm{B}) - U(\mathrm{A})]$$

Energia meccanica

Possiamo riscriverla così $E_K(\mathrm{B}) + U(\mathrm{B}) = E_K(\mathrm{A}) + U(\mathrm{A})$

e **definire** una nuova grandezza, l'**energia meccanica** di una particella come la somma dell'energia cinetica e potenziale: $E = E_K + U$



Il risultato precedente diventa

$$E(\mathrm{B}) = E(\mathrm{A})$$

ovvero

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

L'energia meccanica si conserva !!

Legge di conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica di una particella soggetta solo a forze conservative si conserva:

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

L'energia meccanica è data da

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$$

Una volta calcolato il suo valore in un istante qualsiasi, quel numero (in Joule) rimane costante nel tempo **!!**

Legge di conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica di una particella soggetta solo a forze conservative si conserva:

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

È una conseguenza della seconda legge di Newton (tramite il teorema delle forze vive) e delle definizioni di lavoro e energia.

Sposta il problema dinamico dall'individuazione delle **forze** che agiscono su una particella alla determinazione dell'**energia potenziale** della particella.

Legge di conservazione dell'energia meccanica

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

Abbiamo visto come si determina l'energia potenziale data la forza. Ma possiamo anche ribaltare il ragionamento e calcolare la forza data l'energia potenziale.

Qui mostriamo come si fa nel caso di sistemi unidimensionali (**1D**). Il caso generale **3D** è sostanzialmente uguale, salvo complicazioni di analisi matematica (derivate parziali e gradienti).

Energia potenziale e forza (caso 1D)

Data la forza, la variazione di energia potenziale è

$$\Delta U = U(x_{\mathrm{B}}) - U(x_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F\,dx$$

Per uno spostamento infinitesimo si avrà

$$dU = -F\,dx$$

e la relazione inversa è

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$$

Energia potenziale e forza (caso 1D)

Si può anche ricavare l'equazione del moto dalla conservazione dell'energia meccanica. Infatti

$$\boxed{\Delta E = 0} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(x)\right) = 0$$

Ovvero

$$mv\frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v\left(m\frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx}\right) = 0$$

Esclusa la soluzione banale $v = 0$, l'equazione diventa

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow \boxed{ma = F} \quad !!$$

Energia potenziale e forza (caso 1D)

La relazione

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

ci dice che le forze del campo conservativo tendono ad accelerare la particella verso il minimo (o i minimi locali) dell'energia potenziale. Muovendosi in questo modo la particella acquista energia cinetica, mantenendo l'energia totale costante.
Una particella in quiete nel punto in cui $U(x)$ è **minimo** si trova in **equilibrio** ($F=0$).

[*nota: differenza tra equilibrio stabile e instabile; commento sul segno convenzionale di* U]

Legge di conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica di una particella soggetta solo a forze conservative si conserva:

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

Lo stesso vale anche quando la particella è soggetta a forze che, pur non essendo posizionali, non eseguono lavoro: ad esempio tutte le reazioni vincolari perpendicolari alla traiettoria.

Invece **non vale** se la particella è soggetta a forze **non** conservative che lavorano: ad esempio gli **attriti**, o forze associate a dispositivi meccanici che esercitano forze non posizionali e/o dipendenti dal tempo.

Legge di conservazione dell'energia meccanica

Supponiamo che una particella sia soggetta **sia** a forze conservative **sia** a forze non conservative: $\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{c}} + \vec{F}_{\mathrm{nc}}$

Allora il teorema delle forze vive dà

$$\Delta E_K = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\mathrm{nc}} \cdot d\vec{r}$$

ma il primo integrale è meno la variazione di energia potenziale associata alle forze conservative. Dunque

$$\Delta E_K = -\Delta U + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\mathrm{nc}} \cdot d\vec{r}$$

ovvero

$$\Delta E = \Delta(E_K + U) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\mathrm{nc}} \cdot d\vec{r} = (W_{\mathrm{AB}})_{\mathrm{nc}}$$

Legge di conservazione dell'energia meccanica

Concludiamo che il lavoro fatto dalle forze **non** conservative è pari alla variazione di energia meccanica: $\boxed{\Delta E = (W_{\mathrm{AB}})_{\mathrm{nc}}}$

Corollario: nel caso di una particella che è ferma sia in A che in B, dato che la variazione di energia cinetica è nulla, la **variazione di energia potenziale** è pari al lavoro fatto dalle **forze non conservative contro** le forze del campo conservativo per portare la particella da A a B.

Legge di conservazione dell'energia meccanica

Concludiamo che il lavoro fatto dalle forze **non** conservative è pari alla variazione di energia meccanica: $\boxed{\Delta E = (W_{\mathrm{AB}})_{\mathrm{nc}}}$

Altro corollario: dato che le forze di attrito agiscono sempre in verso contrario alla velocità, il loro lavoro è sempre negativo e, di conseguenza, anche la variazione di energia meccanica della particella è negativa: l'energia meccanica viene **dissipata**.

[*Nota: dove finisce questa energia dissipata, lo vedremo quando studieremo il calore e le trasformazioni termodinamiche*]

In sintesi:

I concetti di lavoro e energia permettono di **riformulare** il problema dinamico da un punto di vista diverso rispetto alla soluzione diretta dell'equazione del moto.

L'importanza di questa nuova formulazione poggia sul fatto che gran parte delle forze rilevanti per la descrizione dei moti osservati sono conservative e, in particolare, lo sono tutte le interazioni fondamentali come, ad esempio, la forza gravitazionale e l'interazione elettromagnetica **!!**