Energia: esempi e applicazioni

Forze conservative ed energia potenziale

Ricordiamo che un campo di forze è conservativo se la forza dipende solo dalla posizione e se il lavoro

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

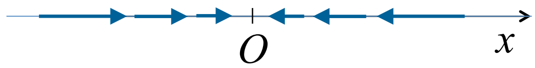
è indipendente dal percorso seguito dalla particella per muoversi dal punto A al punto B.
Se il campo è conservativo, possiamo definire l'energia potenziale $U(\vec{r})$ come

$$U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove P è un punto di riferimento convenzionale, dove si pone $U(\vec{r}_{\mathrm{P}}) = 0$

Esempio #1: **Forza elastica 1D**

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{u}_x$$



È conservativa. Infatti il lavoro

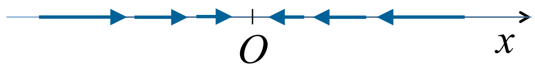
$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_{\mathrm{A}}}^{x_{\mathrm{B}}} (-kx)\,dx = -k\int_{x_{\mathrm{A}}}^{x_{\mathrm{B}}} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^2$$

dipende solo dalle coordinate degli estremi del percorso, non dal percorso. Allora possiamo definire un'energia potenziale. Scegliamo O come riferimento. Allora:

$$U(x_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{0}^{x_{\mathrm{A}}} (-kx)\,dx = k\int_{0}^{x_{\mathrm{A}}} x\,dx = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^2$$

Esempio #1: **Forza elastica 1D**



Quindi, se la forza è

$$F = -k\,x$$

l'energia potenziale è

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

e si verifica immediatamente anche

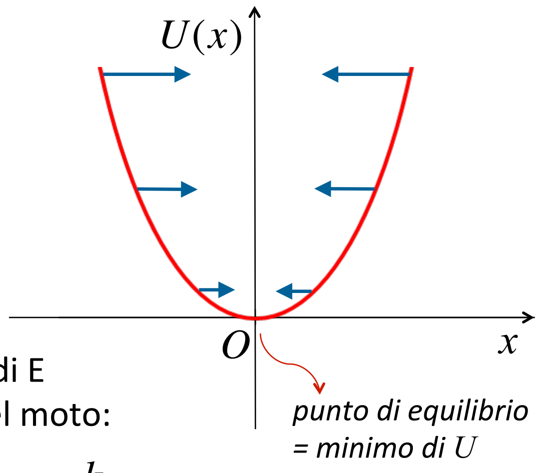
$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Esempio #1: Forza elastica 1D

$$F = -kx$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



dalla conservazione di E
segue l'equazione del moto:

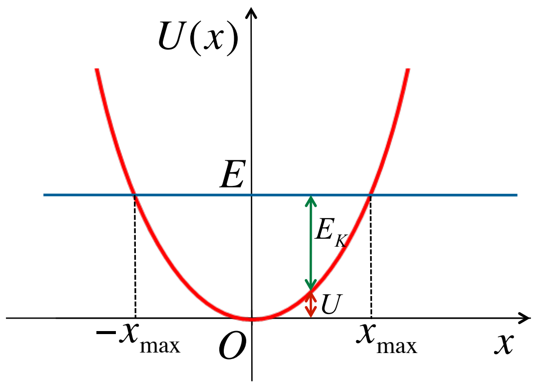
$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow$$ moto armonico

Esempio #1: Forza elastica 1D

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = E_K + U$$



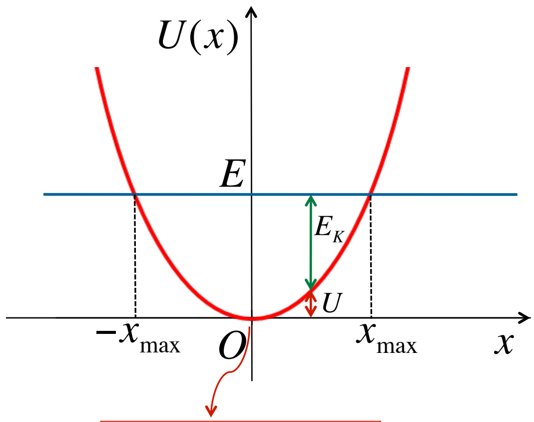
Una volta assegnata l'energia E di una particella (avendo scelto ad esempio le condizioni iniziali) l'energia cinetica e potenziale cambiano nel tempo, mantenendo costante la somma.

Esempio #1: Forza elastica 1D

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = E_K + U$$



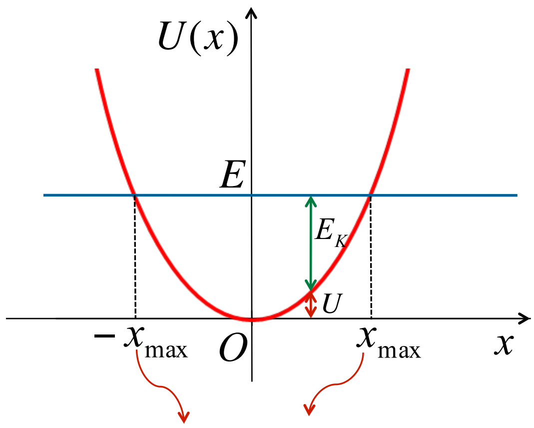
Qui $U=0$ e $E_K=E$
(massima velocità)

Esempio #1: Forza elastica 1D

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = E_K + U$$



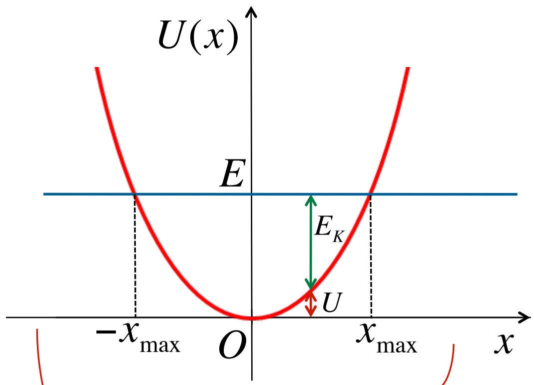
Qui $U=E$ e $E_K=0$
(particella ferma alla
massima distanza da O)

Esempio #1: Forza elastica 1D

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

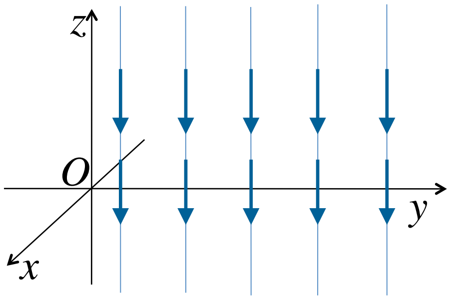
$$E = E_K + U$$



oltre x_{max} la particella non può andare, perchè E_K deve rimanere positiva!

Esempio #2: Forza peso

$$\vec{F} = -mg\,\hat{u}_z$$



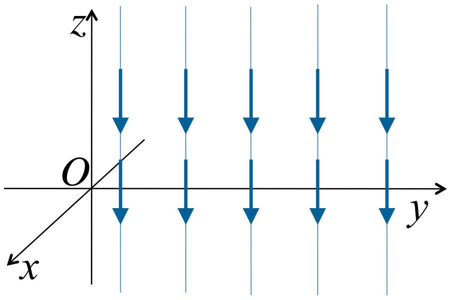
È conservativa. Infatti

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{z_A}^{z_B} (-mg)\,dz = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = mg(z_A - z_B)$$

dipende solo dalle coordinate degli estremi del percorso, non dal percorso. Possiamo definire una $U(z)$. Scegliamo il riferimento in $z=0$ in modo che $U(0)=0$. Allora:

$$U(z_A) = -\int_O^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{z_A} (-mg)\,dz = mg\int_0^{z_A} dz = mgz_A$$

Esempio #2: Forza peso



Quindi, se la forza è

$$\vec{F} = -mg\,\hat{u}_z$$

l'energia potenziale è

$$U(z) = mg\,z$$

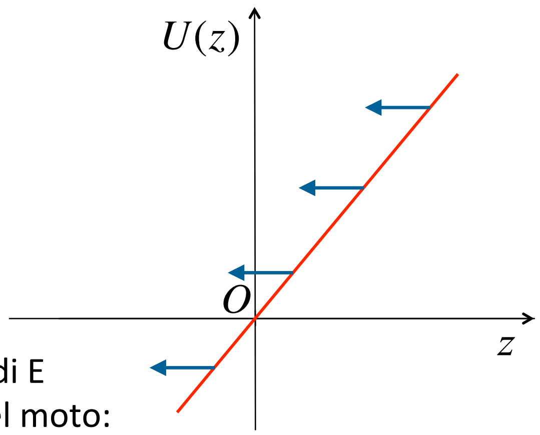
e si verifica immediatamente anche $F_z = -\dfrac{dU}{dz}$

Esempio #2: Forza peso

$$F_z = -mg$$

$$U(z) = mgz$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$



dalla conservazione di E
segue l'equazione del moto:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \Rightarrow a_z = -g$$

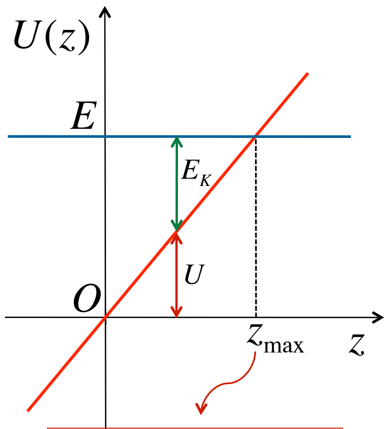
Esempio #2: **Forza peso**

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U(z) = mgz$$

$$E = E_K + U$$

Una volta assegnata l'energia E di una particella, l'energia cinetica e potenziale cambiano nel tempo mantenendo costante la somma.



Qui $U=E$ e $E_K=0$ (particella ferma alla massima quota)

Esempio #2: **Forza peso**

Cadendo o scivolando da fermo da una quota h si acquista una velocità indipendente dalla traiettoria. Infatti, all'inizio si ha

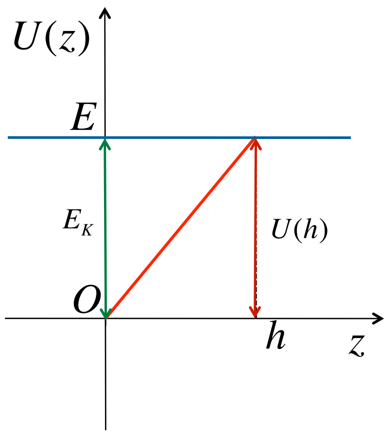
$$E = U(h) = mgh$$

alla fine si ha

$$E = E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

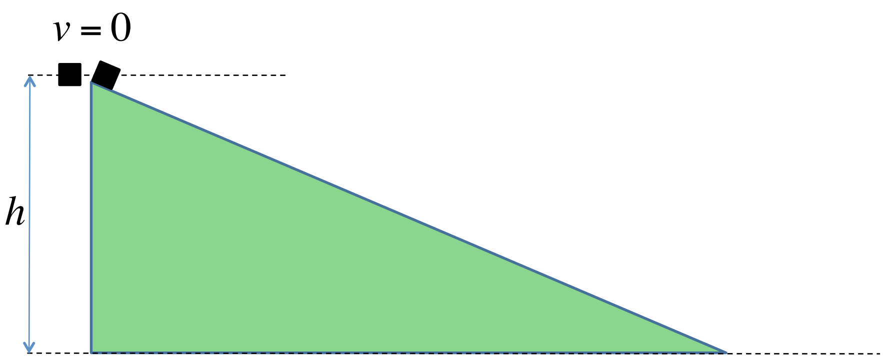
e dunque

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$



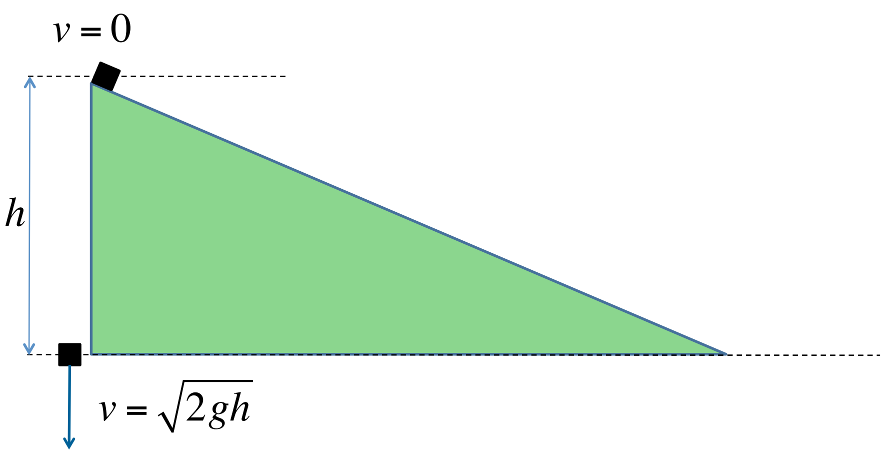
Esempio #2: Forza peso

Esempio: caduta libera e piano inclinato liscio



Esempio #2: Forza peso

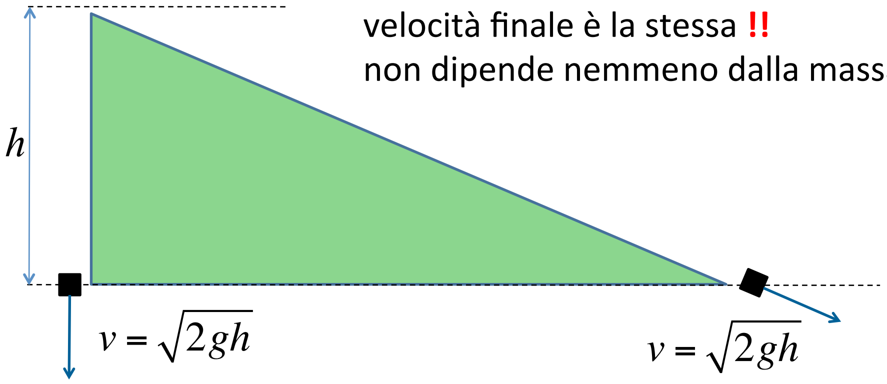
Esempio: caduta libera e piano inclinato liscio



Esempio #2: Forza peso

Esempio: caduta libera e piano inclinato liscio.

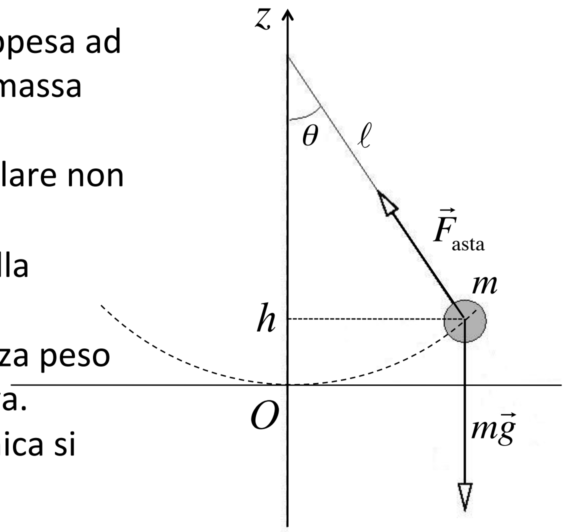
Il tempo di caduta è diverso, l'accelerazione è diversa, ma la velocità finale è la stessa !!
non dipende nemmeno dalla massa.



Esempio #2: Forza peso

Altro caso interessante: **pendolo**

La massa m sia appesa ad un'asta rigida di massa trascurabile.
La reazione vincolare non lavora, perchè è perpendicolare alla traiettoria.
Lavora solo la forza peso che è conservativa.
L'energia meccanica si conserva.



Esempio #2: Forza peso

L'energia potenziale è

$$U(\theta) = mgh = mg\ell(1-\cos\theta)$$

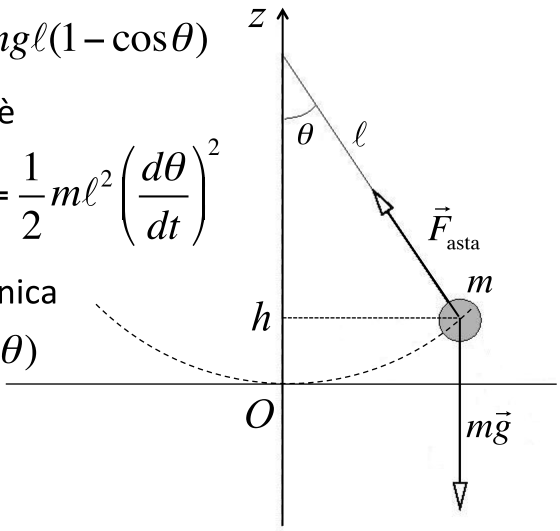
l'energia cinetica è

$$E_K(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

e l'energia meccanica

$$E = E_K(\theta) + U(\theta)$$

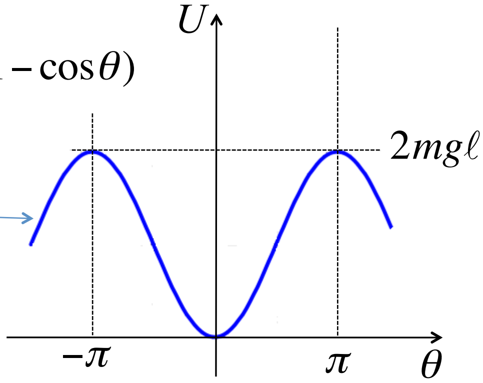
è costante.



Esempio #2: Forza peso

Fissata l'energia meccanica E (ad esempio dalle condizioni iniziali), si possono avere vari tipi di moto.

$$U(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)$$



Esempio #2: Forza peso

Per E molto più piccolo di $mg\ell$:

distanza da O lungo la traiettoria

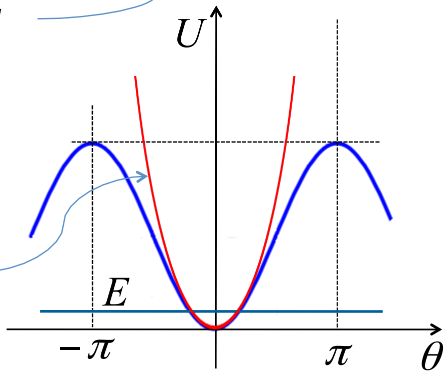
$$U(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta) \cong \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{\ell}(\ell\theta)^2 = \frac{1}{2}ks^2$$

espansione del coseno per piccoli angoli

costante positiva

$$k = \frac{mg}{\ell}$$

espansione dell'energia potenziale per piccoli angoli



Esempio #2: Forza peso

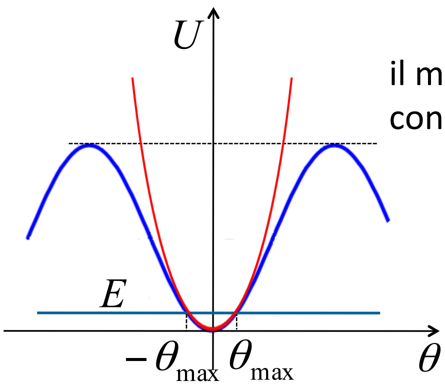
Per E molto più piccolo di $mg\ell$:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2$$

è l'energia meccanica di un oscillatore armonico **!!**

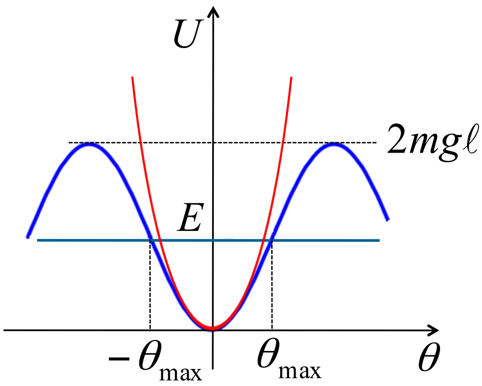
il moto è armonico, con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



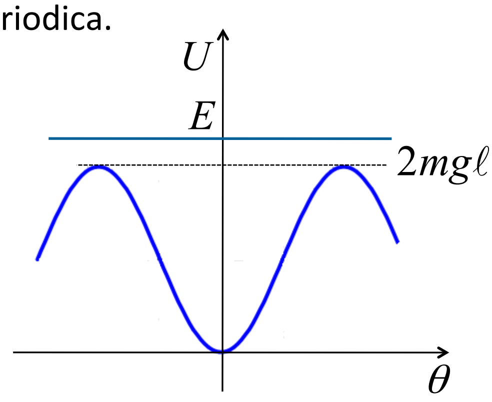
Esempio #2: Forza peso

Per E minore (ma non troppo) di $2mg\ell$: il moto è ancora periodico, compreso in un intervallo finito di angoli, ma non è armonico **!!**



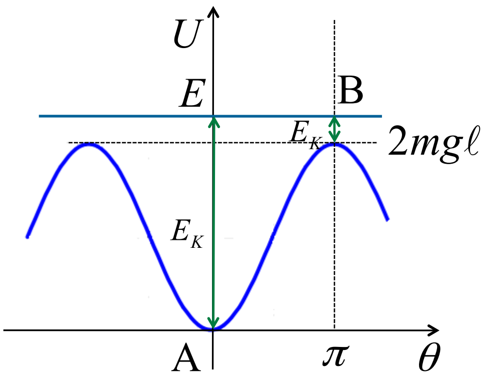
Esempio #2: Forza peso

Per E maggiore di $2mg\ell$: il pendolo continua a girare. La velocità è massima nei minimi di U e minima nei massimi di U, dove $z = 2\ell$. È un moto circolare a velocità **non** costante e periodica.



Esempio #2: Forza peso

Data $E > 2mg\ell$, la differenza tra le velocità in fondo e in cima si trova così:



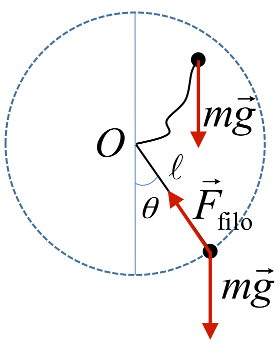
$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{E(A)} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2 + 2mg\ell}_{E(B)}$$

$$v_A^2 - v_B^2 = 4g\ell$$

è indipendente dalla massa! Per arrivare in cima a velocità nulla, basta partire con $v_A = \sqrt{4g\ell}$

Esempio #2: Forza peso

Attenzione però: se invece dell'asta c'è un **filo**, la condizione per arrivare in cima è diversa. La forza esercitata dal filo, a differenza di quella di un'asta, è sempre centripeta.



Se la velocità iniziale è

$$v_A = \sqrt{4g\ell}$$

ad un certo angolo il filo cessa di essere in tensione e la massa cade soggetta alla sola forza peso.

Esercizio: si dimostri che per arrivare in cima serve una velocità

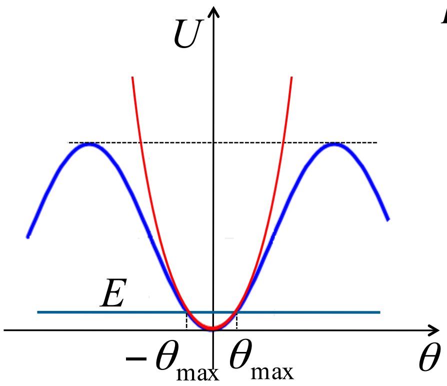
$$v_A = \sqrt{5g\ell}$$

[*vedi es.4.5 Dalba-Fornasini*]

Osservazione interessante sull'**approssimazione armonica**

Abbiamo visto che per piccoli angoli l'energia del pendolo può essere approssimata nella forma

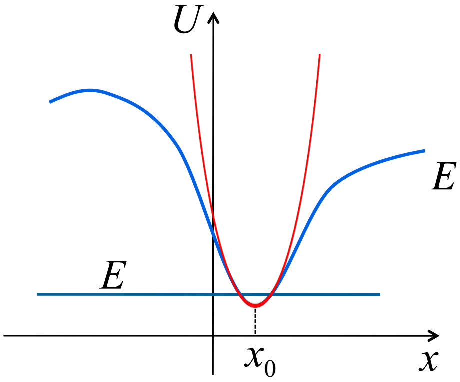
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2 \qquad s = \ell\theta$$



Una forma quadratica di questo tipo implica un moto armonico.

Ma la stessa cosa accade ogni volta che l'energia potenziale ammette un **minimo**, in modo che

$$U(x) \cong U(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}}_{k}(x-x_0)^2 + \ldots$$

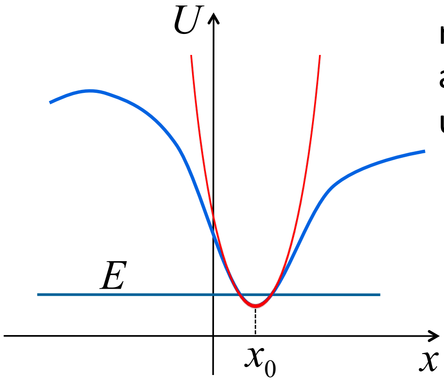


$$E - U(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

piccole oscillazioni attorno al minimo di U: moto armonico **!!**

Ecco perché il moto armonico **non** riguarda solo le molle, ma emerge anche in contesti diversi e con implicazioni importanti...

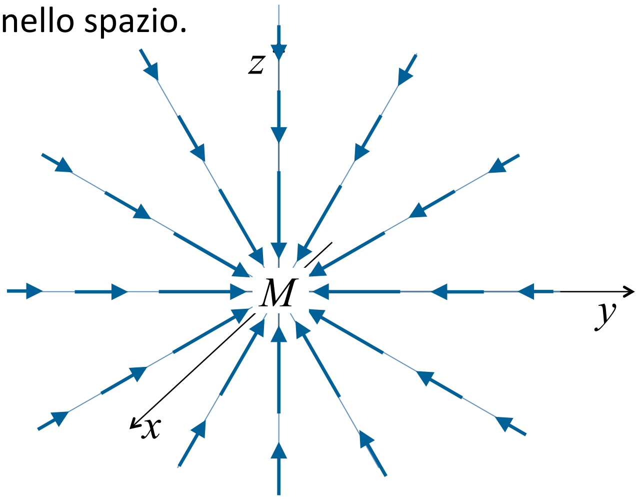
ad esempio nel moto degli atomi attorno alle posizioni reticolari di un solido o attorno alle posizioni di equilibrio in una molecola, ecc.



Esempio #3: Forza gravitazionale

Consideriamo una particella di massa m che si muove nel campo gravitazionale prodotto da un corpo di massa M considerato fisso nello spazio.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$



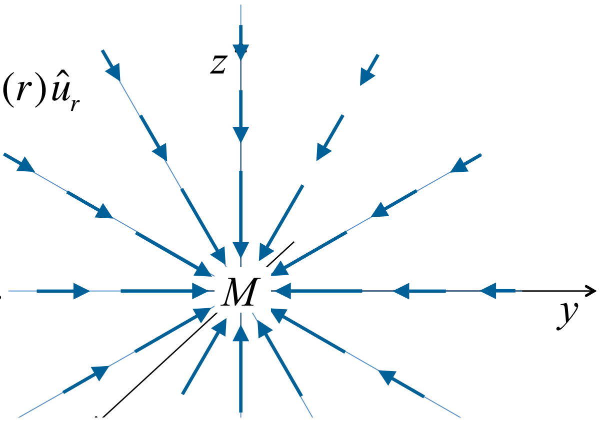
Esempio #3: Forza gravitazionale

È un campo di forze centrali. Abbiamo già dimostrato che le forze centrali sono conservative.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r = f(r)\hat{u}_r$$

$$\Delta U \equiv -\int_{A}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{r_A}^{r_B} f(r)dr$$



Problema: dove mettiamo il punto P di riferimento **?**

Esempio #3: Forza gravitazionale

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r = f(r)\hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad U(r_A) = -\int_{r_P}^{r_A} f(r)dr$$

Non conviene mettere P nel punto dove si trova la sorgente del campo, perchè in quel punto la forza diverge e avremmo problemi nel fare l'integrale. Dato che la scelta è arbitraria conviene mettere P a **distanza infinita** dalla sorgente, dove la forza tende a zero:

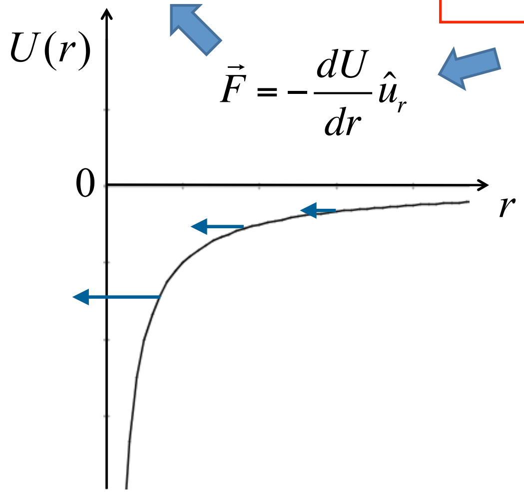
$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} f(r)dr = GmM\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM}{r}$$

Esempio #3: **Forza gravitazionale**

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r}$$

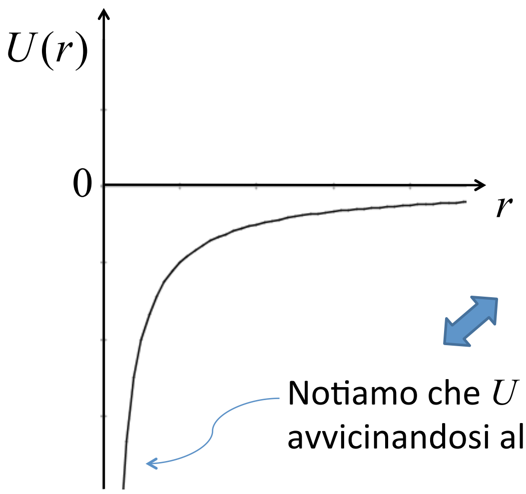
$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM}{r}}$$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{u}_r$$



Esempio #3: **Forza gravitazionale**

$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM}{r}}$$

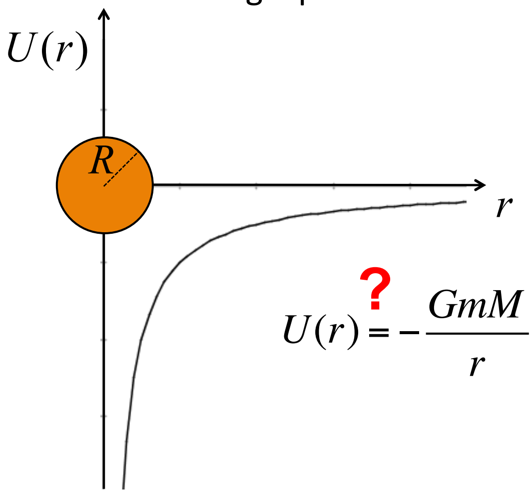


Non è un problema se le sorgenti sono corpi estesi (stelle, pianeti, e in generale corpi con densità di massa finita)

Notiamo che U diverge avvicinandosi alla sorgente !

Esempio #3: Forza gravitazionale

Prendiamo ad esempio un pianeta di raggio R.
L'energia potenziale è la stessa di prima ?

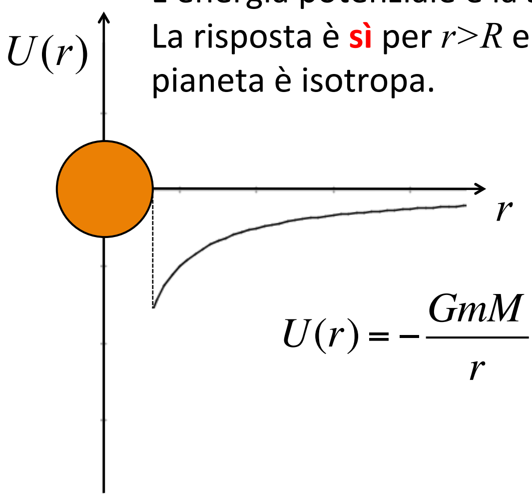


$$U(r) \overset{?}{=} -\frac{GmM}{r}$$

Esempio #3: Forza gravitazionale

Prendiamo ad esempio un pianeta di raggio R.
L'energia potenziale è la stessa di prima ?
La risposta è **sì** per $r>R$ e se la densità del pianeta è isotropa.

Si dimostra usando il principio di sovrapposizione.



$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

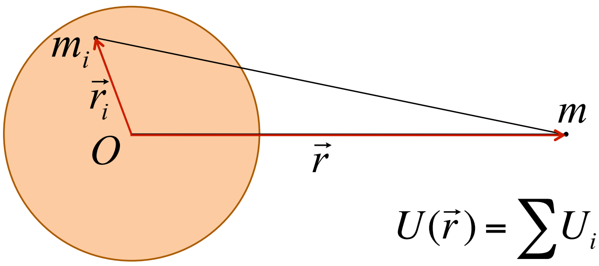
Esempio #3: Forza gravitazionale

Se vale il principio di sovrapposizione per le forze vale anche per l'energia potenziale, dato che l'integrale di una somma è uguale alla somma di integrali.

$$U(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = -\sum_i \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i U_i(\vec{r}_{\mathrm{A}})$$

Possiamo quindi immaginare di suddividere un pianeta in tante masserelle m_i, ciascuna delle quali produce un potenziale $U_i(r)$ su una particella di massa m che sta all'esterno del pianeta a distanza r.

Esempio #3: Forza gravitazionale



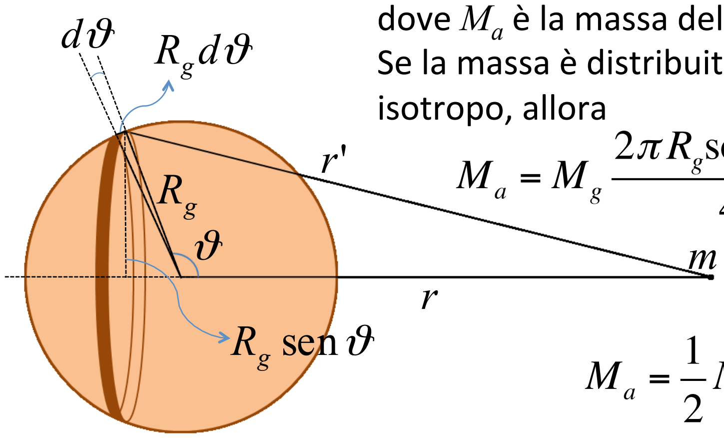
$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) = -\sum_i \frac{Gm_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Conviene eseguire la somma considerando prima un **guscio sferico cavo** di raggio R_g, di spessore infinitesimo e massa M_g, suddividendo lo stesso guscio in **anelli**...

Esempio #3: Forza gravitazionale

il contributo dell'**anello** all'energia potenziale in r è

$$U_a(r) = -\sum_i \frac{Gm_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -\frac{GM_a m}{r'}$$



dove M_a è la massa dell'anello.
Se la massa è distribuita in modo isotropo, allora

$$M_a = M_g \frac{2\pi R_g \operatorname{sen}\vartheta (R_g d\vartheta)}{4\pi R_g^2}$$

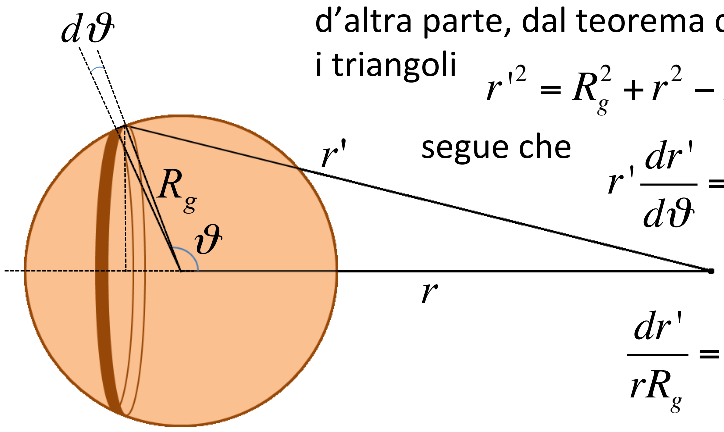
$$\Downarrow$$

$$M_a = \frac{1}{2} M_g \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta$$

Esempio #3: Forza gravitazionale

dunque il contributo dell'anello è

$$U_a(r) = -\frac{GmM_g \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta}{2r'}$$



d'altra parte, dal teorema di Carnot per i triangoli $r'^2 = R_g^2 + r^2 - 2rR_g \cos\vartheta$

segue che $r' \dfrac{dr'}{d\vartheta} = rR_g \operatorname{sen}\vartheta$

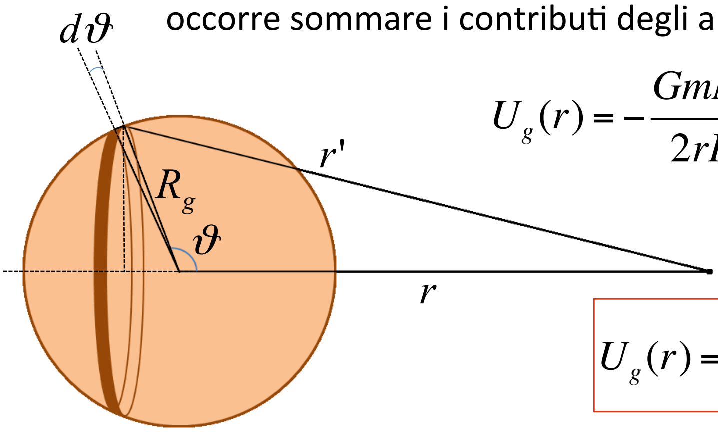
$$\Downarrow$$

$$\frac{dr'}{rR_g} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta}{r'}$$

Esempio #3: Forza gravitazionale

quindi $$U_a(r) = -\frac{GmM_g \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta}{2r'} = -\frac{GmM_g\, dr'}{2rR_g}$$

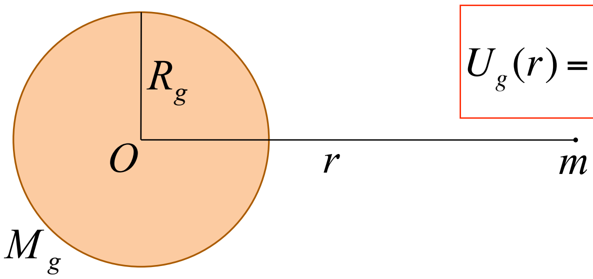
e per trovare il contributo di tutto il **guscio** occorre sommare i contributi degli anelli:



$$U_g(r) = -\frac{GmM_g}{2rR_g}\int_{r-R_g}^{r+R_g} dr'$$

$$\boxed{U_g(r) = -\frac{GmM_g}{r}}$$

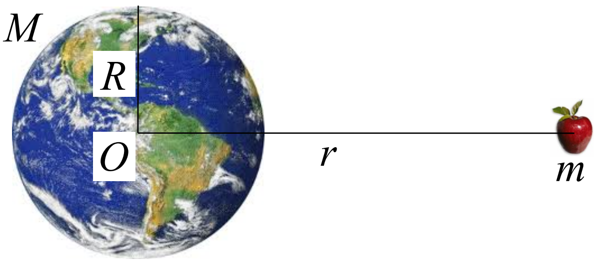
Esempio #3: Forza gravitazionale



$$\boxed{U_g(r) = -\frac{GmM_g}{r}}$$

Abbiamo trovato che l'energia potenziale in r associata ad una sorgente di campo gravitazionale in forma di guscio sferico cavo è **la stessa che si avrebbe se** tutta la massa del guscio fosse concentrata al centro **!!**
Uniche ipotesi: distribuzione isotropa e $r > R_g$.

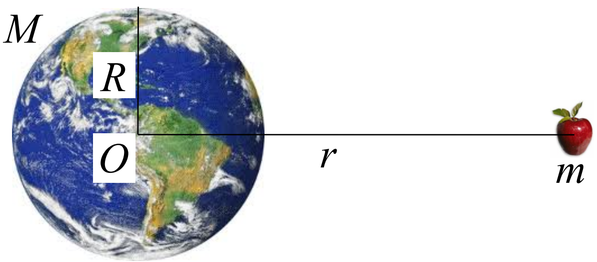
Esempio #3: Forza gravitazionale



L'ultimo passo consiste nel considerare un pianeta come un insieme di gusci cavi di raggio compresso tra *0* e R. Per ciascuno vale la regola precedente: possiamo mettere le masse dei gusci tutte al centro e calcolare

$$U(r) = -\sum_{\text{gusci}} \frac{GmM_g}{r} = -\frac{Gm}{r}\sum_{\text{gusci}} M_g = -\frac{GmM}{r}$$

Esempio #3: Forza gravitazionale



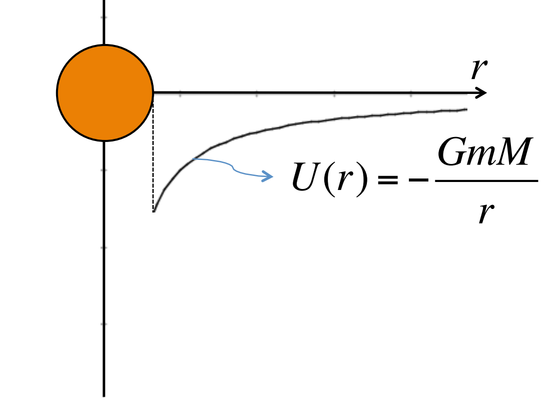
Dunque, se la distribuzione di massa è isotropa e $r > R$, l'energia potenziale della particella soggetta all'attrazione della massa estesa è identica a quella che si avrebbe mettendo tutta la massa della sorgente nel suo centro:

$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM}{r}}$$

Esempio #3: Forza gravitazionale

Nota: se l'energia potenziale associata al pianeta, al suo esterno, è la stessa di una sorgente puntiforme, allora anche la forza sarà la stessa (l'una è derivata o integrale dell'altra).

$U(r)$



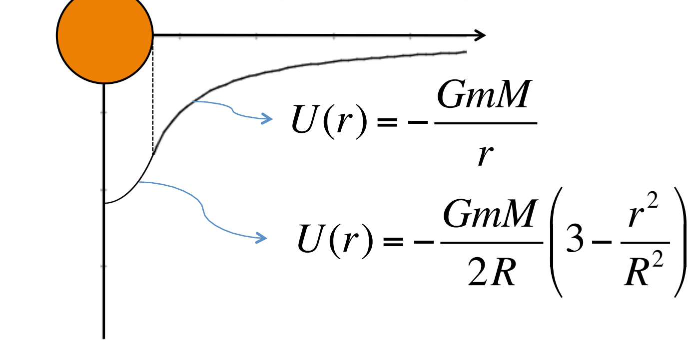
$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

Esempio #3: Forza gravitazionale

E dentro il pianeta **??**

Stesso tipo di calcolo ma più complicato. Il risultato dipende dalla distribuzione radiale di massa. Se la distribuzione è **omogenea** (densità uniforme) allora il risultato è semplice [*per il calcolo esplicito si veda p.180 di Knudsen-Hjorth*]

$U(r)$

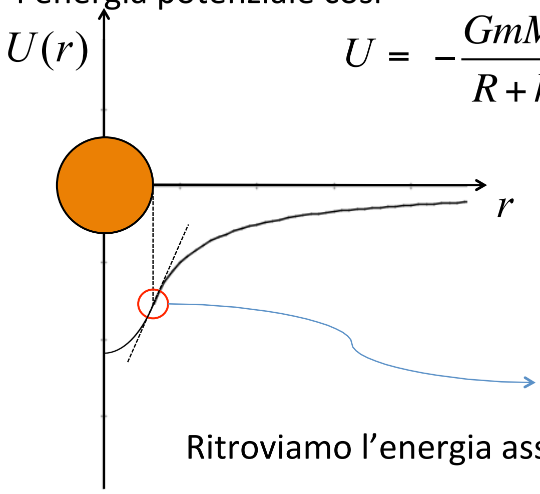


$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

$$U(r) = -\frac{GmM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Esempio #3: **Forza gravitazionale**

Se ci si muove **vicino alla superficie** del pianeta, si può sviluppare la distanza così $r \cong R + h$ con $h << R$ e l'energia potenziale così



$$U = -\frac{GmM}{R+h} = -\frac{GmM}{R}\frac{1}{1+h/R}$$

$$\cong -\frac{GmM}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

$$= \frac{GmM}{R^2}h + \mathrm{cost}$$

$$= mgh + \mathrm{cost}$$ **OK**

Ritroviamo l'energia associata alla forza peso.

Esercizio

Supponiamo di scavare un pozzo che attraversa la luna dal suo polo nord al polo sud e di lasciar cadere nel pozzo un sasso. Nell'ipotesi che la luna abbia distribuzione di massa omogenea, quale tipo di moto compie il sasso?
Si confronti il tempo impiegato dal sasso ad attraversare la luna con il tempo impiegato da un satellite per andare da un polo all'altro lungo un orbita circolare appena sopra la superficie.

[*svolto alla lavagna*]