Momento angolare

Momento angolare

Consideriamo una particella di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$. La quantità di moto è $\vec{p} = m\vec{v}$. Scegliamo un punto arbitrario O e **definiamo** il **momento angolare** (o momento della quantità di moto) della particella rispetto al punto O la grandezza

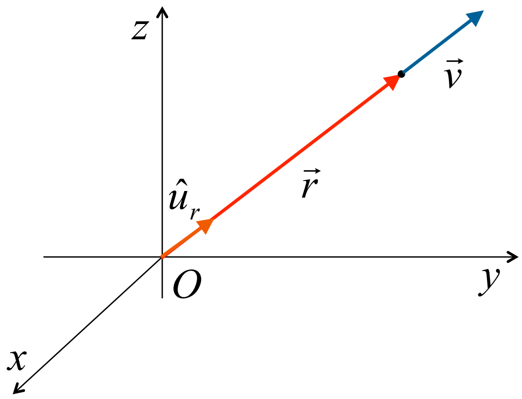
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

[*Il punto O è anche detto "polo" per il calcolo del momento. Non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento. Attenzione all'ordine dei fattori nel prodotto vettoriale!*]

Momento angolare

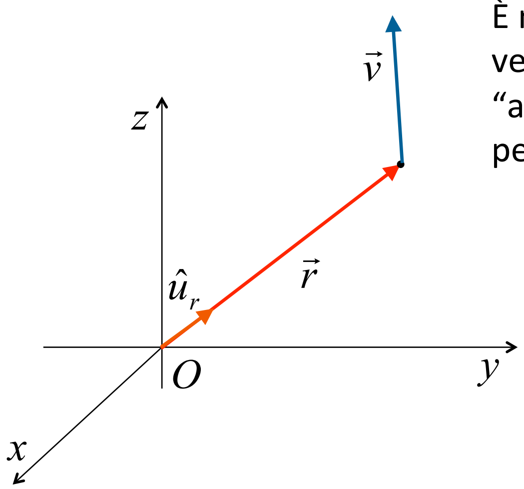
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$ Quali informazioni contiene?

È nullo se il moto è radiale rispetto a O. Infatti, se $\vec{v} = \hat{u}_r v$ allora $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mv\vec{r} \times \hat{u}_r = 0$



Momento angolare

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$ Quali informazioni contiene?



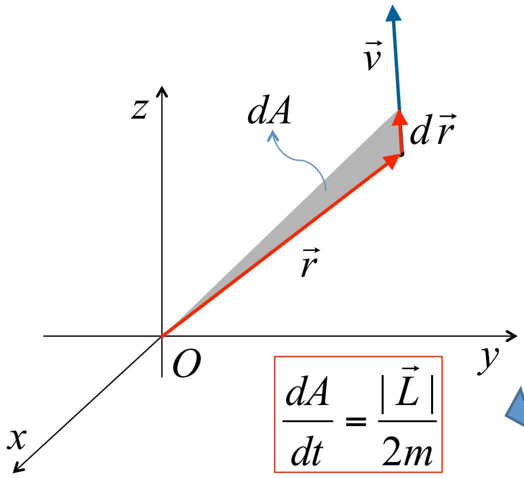
È non nullo solo se la velocità ha componenti "angolari" rispetto a O, perpendicolari a $\hat{u}_r$.

Momento angolare

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

Nel tempo dt la particella percorre uno tratto $d\vec{r} = \vec{v}dt$ e spazza un'area

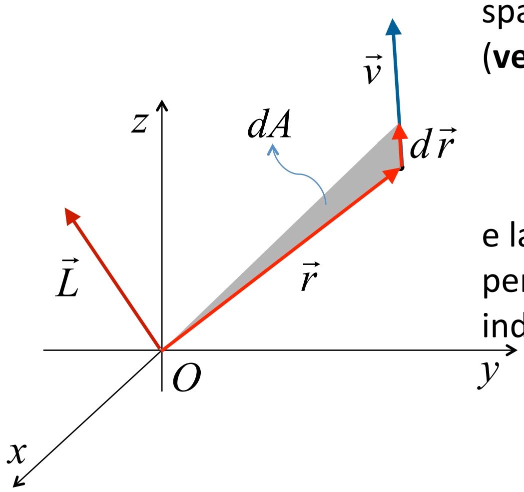
$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|dt = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times \vec{p}\right|dt = \frac{|\vec{L}|}{2m}dt$$



$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}}$$

Momento angolare

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

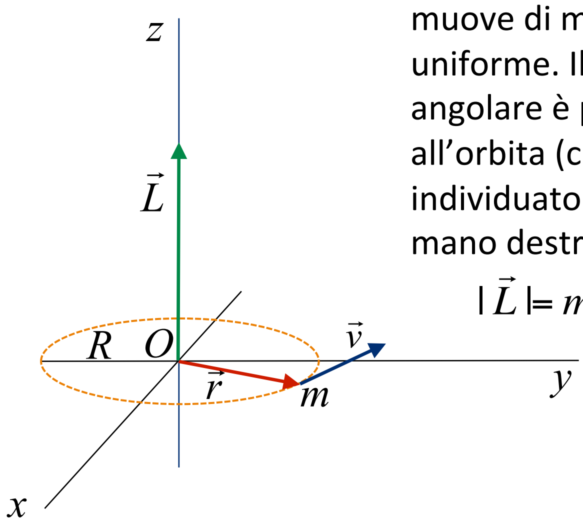


Quindi il modulo del momento angolare fornisce una misura dell'area spazzata nell'unità di tempo (**velocità areale**)

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}}$$

e la sua direzione è perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}$ e $d\vec{r}$.

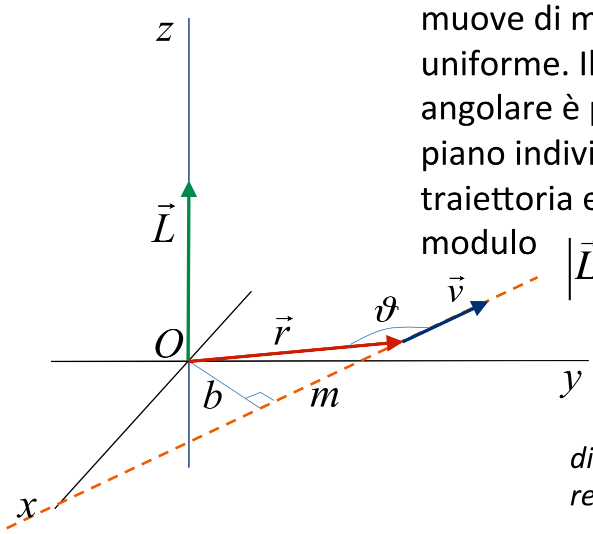
Momento angolare



Esempio: particella che si muove di moto circolare uniforme. Il momento angolare è perpendicolare all'orbita (con verso individuato dalla regola della mano destra) ed ha modulo

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}| = mR^2\omega$$

Momento angolare



Altro esempio: particella che si muove di moto rettilineo uniforme. Il momento angolare è perpendicolare al piano individuato dalla traiettoria e dal punto O, ed ha modulo

$$\left|\vec{L}\right| = m|\vec{v}||\vec{r}|\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$
$$= mvb$$

distanza della retta dal punto O

Momento angolare

In sintesi: il momento angolare fornisce l'orientazione del piano orbitale istantaneo e la velocità areale calcolata rispetto ad un polo O.

Nota: il momento angolare dipende dalla scelta arbitraria di O. Ma allora quale utilità può avere **??**

Per capirlo, conviene vedere cosa succede se usiamo la seconda legge di Newton...

Momento angolare

Calcoliamo la derivata temporale del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Il primo addendo è nullo e per il secondo usiamo la II legge di Newton: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$

La quantità a destra è detta **momento della forza** rispetto al polo O (lo stesso rispetto al quale viene calcolato il momento angolare!): $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$

[*nota: nel caso di più forze agenti sulla particella, F è la risultante*]

Momento angolare

Abbiamo quindi trovato la legge

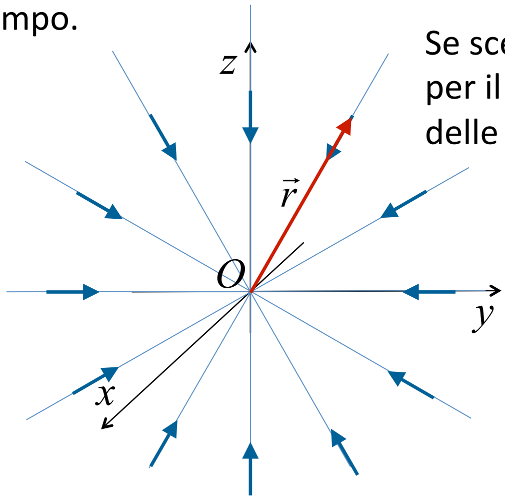
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

come diretta conseguenza della seconda legge di Newton. Vale sempre, ed è **indipendente** dalla scelta arbitraria del polo O, a patto che venga usato **lo stesso** O per il momento angolare e per il momento delle forze**!!**

Ci tornerà utile in varie occasioni. Qui vediamo l'esempio dei campi di forze centrali.

Momento angolare

Le forze centrali sono quelle per cui $\vec{F} = f(r)\hat{u}_r$ dove r è la distanza dal punto O dove si trova la sorgente del campo.



Se scegliamo O come polo per il calcolo del momento delle forze, abbiamo

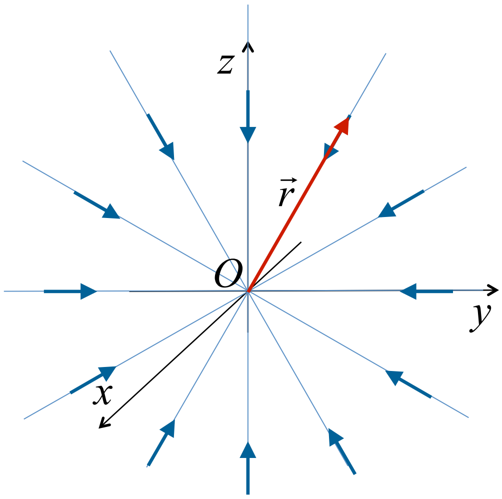
$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= f(r)\vec{r} \times \hat{u}_r = 0$$

Il momento delle forze è nullo.

Momento angolare

Quindi per le forze centrali, la legge $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ diventa

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$



Il momento angolare, calcolato rispetto ad O, si conserva **!!**

Leggi di conservazione

Finora abbiamo visto tre leggi di conservazione:

✓Se una particella non è soggetta a forze, la sua **quantità di moto** si conserva [generalizzabile a sistemi isolati di N particelle interagenti solo tra loro]

✓Se una particella è soggetta a sole forze conservative, la sua **energia meccanica** si conserva.

✓Se una particella è soggetta ad un campo di forze centrali, il suo **momento angolare** rispetto alla sorgente del campo si conserva.