Moto in campi di forze centrali

Moto in campi di forze centrali

Abbiamo visto che il momento angolare di una particella soggetta ad un campo di forze centrali si conserva

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$

D'altra parte sappiamo che i campi di forze centrali sono anche conservativi e, quindi, si conserva anche la sua energia meccanica

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$$

con $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$

Moto in campi di forze centrali

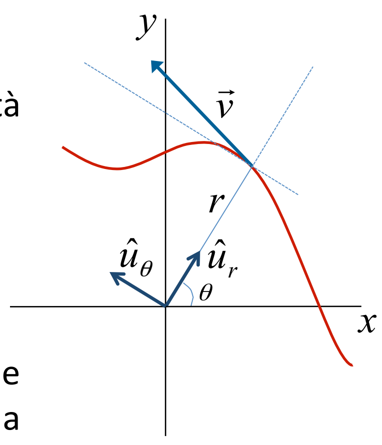
Una conseguenza della $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$

è che la particella si muove su un **piano fisso** che contiene la sorgente del campo e la traiettoria della particella (la direzione di $\vec{L}$, per definizione, è sempre perpendicolare al piano orbitale, e se $\vec{L}$ è costante, allora il piano è fisso).

Un'altra conseguenza è che la **velocità areale** rispetto al punto O (proporzionale al modulo del momento angolare) è **costante**. La particella spazza aree uguali in tempi uguali. [*nota: questa è la seconda legge di Keplero*]

Moto in campi di forze centrali

Quindi, dato il valore iniziale del momento angolare (fissato ad esempio dalla posizione e velocità della particella in un istante generico arbitrario), il moto è confinato in un piano orbitale fisso. Si passa da **3D** a **2D** **!!**



Possiamo introdurre due versori e due coordinate polari, in modo da decomporre la velocità così:

$$\vec{v} = \hat{u}_r v_r + \hat{u}_\theta v_\theta$$

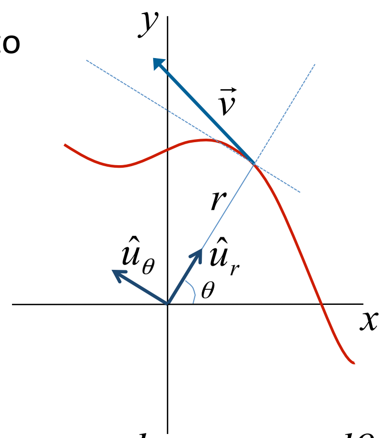
Moto in campi di forze centrali

Cosa sono v_r e v_θ ?
Basta considerare lo spostamento in dt nelle stesse direzioni:

$$d\vec{r} = \hat{u}_r dr + \underbrace{\hat{u}_\theta r d\theta}_{}$$

spostamento radiale

spostamento lungo la circonferenza di raggio r



Dunque

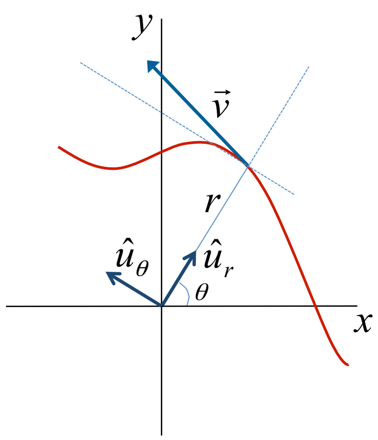
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{u}_r \frac{dr}{dt} + \hat{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_r = \frac{dr}{dt}; \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

Moto in campi di forze centrali

Allora il momento angolare della particella rispetto a O è dato da

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$
$$= m\vec{r} \times (\hat{u}_r v_r + \hat{u}_\theta v_\theta)$$
$$= mrv_\theta \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta$$
$$= mrv_\theta \hat{u}_z = mr^2 \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_z$$

versore perpendicolare al piano dell'orbita



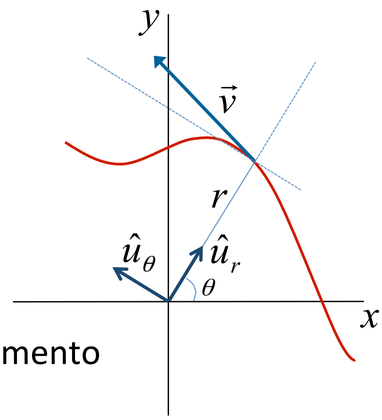
Moto in campi di forze centrali

Possiamo scrivere $\vec{L} = L\hat{u}_z$
con

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

ovvero

$$\boxed{r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}}$$

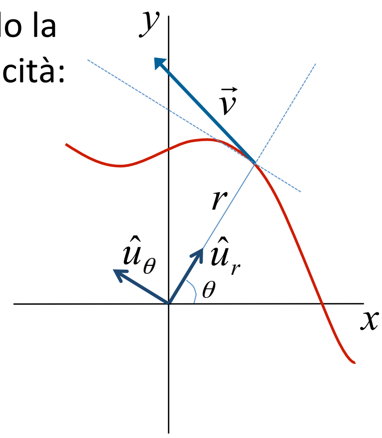


che lega le due coordinate al momento angolare (costante).
Notiamo che, quando il raggio dell'orbita diminuisce, la velocità angolare aumenta, e viceversa, consistentemente con il fatto che la velocità areale è costante.

Moto in campi di forze centrali

Possiamo anche riscrivere la conservazione dell'energia usando la stessa decomposizione della velocità:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\,|\hat{u}_r v_r + \hat{u}_\theta v_\theta|^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + U(r) \end{aligned}$$



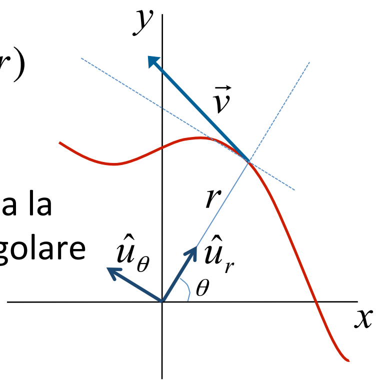
Moto in campi di forze centrali

Quindi

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + U(r)$$

e possiamo usare l'espressione precedentemente trovata che lega la velocità angolare al momento angolare

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$$



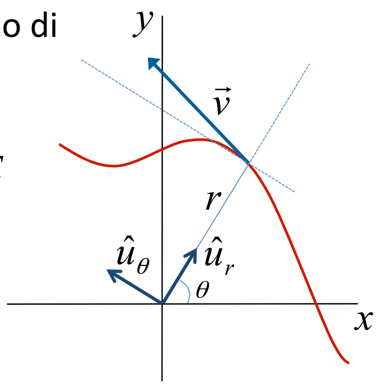
per riscrivere E nella forma

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}$$

Moto in campi di forze centrali

Riassumendo, abbiamo trovato che il moto di una particella in un campo di forze centrali segue le due leggi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$



dove E e L sono costanti del moto, fissate dalle condizioni iniziali.

Moto in campi di forze centrali

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Nota #1: Una volta fissate le costanti E e L, le due equazioni differenziali possono essere risolte per trovare le leggi orarie $r(t)$, $\theta(t)$ e la traiettoria $r(\theta)$.

Moto in campi di forze centrali

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Nota #2: Dato che sono state derivate dalla seconda legge di Newton, sono del tutte equivalenti a quest'ultima in termini di contenuto fisico. In altri termini, risolvere le due equazioni sopra darà gli stessi risultati che risolvere l'equazione del moto

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$$

Moto in campi di forze centrali

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Nota #3: Nell'energia meccanica possiamo definire un'**energia potenziale efficace**

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

in modo da ridurre la prima equazione al problema della conservazione di E per un moto 1D nella direzione radiale.

Moto in campi di forze centrali

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + U_{\text{eff}}(r) = E$$

con
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

Qual è il significato di U_{eff}**??**
Nel sistema di riferimento **inerziale** in cui la particella ha velocità angolare istantanea $d\theta/dt$, la quantità $L^2/2mr^2$ è la parte di **energia cinetica** associata al moto di **rotazione** attorno alla sorgente del campo. Essendo L costante, questo termine è una funzione soltanto di r **!!**

Moto in campi di forze centrali

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + U_{\text{eff}}(r) = E$$

con
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

Qual è il significato di U_{eff} ??

Nel sistema di riferimento **non inerziale** che ruota rispetto al sistema inerziale con la **stessa** velocità angolare $d\theta/dt$ della particella, la quantità $L^2/2mr^2$ è l'**energia potenziale** associata alla forza apparente **centrifuga** !!

Infatti...

Moto in campi di forze centrali

... infatti, possiamo ricordare la relazione tra energia potenziale e forza in un campo centrale $\vec{F} = f(r)\hat{u}_r$

$$-\frac{dU}{dr} = f(r)$$

e vedere cosa succede nel caso di $L^2/2mr^2$:

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = -\frac{L^2}{2m}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{L^2}{mr^3} = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Moto in campi di forze centrali

dunque $$-\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ma il membro di destra è proprio la forza centrifuga, essendo
$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{u}_r = f_c(r)\hat{u}_r$$
$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_z$$

Notiamo che la forza centrifuga ha la forma di un campo di forze centrali e, dunque, ammette un'energia potenziale (apparente), che è proprio $L^2/2mr^2$.

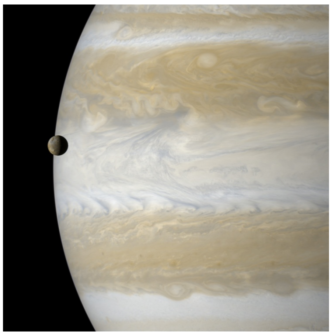
Moto in campi di forze centrali

In conclusione: per determinare il moto di una particella in un campo di forze centrali si può, in alternativa, risolvere l'equazione del moto
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(r)\hat{u}_r$$

oppure risolvere le due equazioni
$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Problema di Keplero

Come esempio consideriamo il moto di un corpo di massa m soggetto all'**attrazione gravitazionale** di un corpo di massa M **fisso**. Allora



$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$

e

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Questo è noto come **problema di Keplero**, dato che include il caso delle orbite dei pianeti attorno al sole.

Problema di Keplero

Risolviamo il problema usando le leggi di conservazione.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Il caso $L=0$ (ovvero $d\theta/dt=0$) è banale. Il moto è puramente radiale. La particella si muove su una retta che passa per il centro di gravità: è in **caduta libera**.

Problema di Keplero

Risolviamo il problema usando le leggi di conservazione.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E \\ mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \end{cases}$$

Ci poniamo nel caso $L \neq 0$ e vogliamo determinare la traiettoria $r(\theta)$. Bisogna eleminare il tempo t dalle due equazioni sopra. Notiamo che t entra solo nelle derivate. Possiamo usare le proprietà delle derivate di funzione di funzione, in questo modo...

Problema di Keplero

... in questo modo:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$$

Inoltre, per comodità di calcolo, conviene introdurre una nuova variabile $\boxed{u = 1/r}$
in modo che

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{L}{mr^2}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

da cui $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

Problema di Keplero

Così l'espressione per l'energia meccanica

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{2mr^2}-G\frac{mM}{r}=E$$

si trasforma in

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{L^2}{2m}u^2-GmMu=E$$

e possiamo imporre la conservazione di E in questo modo

$$0=\frac{dE}{d\theta}=\frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)u-GmM\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$

Problema di Keplero

Quindi, il fatto che l'energia meccanica si conserva, impone

$$\frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{L^2}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)u-GmM\left(\frac{du}{d\theta}\right)=0$$

Tolta la soluzione banale $(du/d\theta)=0$, rimane l'equazione:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{Gm^2M}{L^2}$$

Il termine di destra è una costante e l'equazione è **formalmente** analoga a quella di un **oscillatore armonico** soggetto ad una forza esterna costante [*come per un corpo appeso al soffitto tramite una molla, con pulsazione=1*].

Problema di Keplero

L'equazione

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2M}{L^2}$$

ha soluzione generale

$$u(\theta) = \frac{Gm^2M}{L^2} + A\cos(\theta + \theta_0)$$

dove A e θ_0 sono costanti d'integrazione, da fissare con le condizioni iniziali.

[*che questa sia la soluzione lo si vede anche, banalmente, per sostituzione nell'equazione di partenza*]

Problema di Keplero

Abbiamo quindi

$$u(\theta) = \frac{Gm^2M}{L^2} + A\cos(\theta + \theta_0)$$

e possiamo riscriverla in termini della coordinata radiale

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{Gm^2M}{L^2} + A\cos(\theta + \theta_0)$$

ovvero

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{Gm^2M}{L^2}\left(1 + \frac{AL^2}{Gm^2M}\cos(\theta + \theta_0)\right)$$

Problema di Keplero

Mettiamoci nel caso $\theta_0 = 0$, che differisce dal caso generale solo per una rotazione arbitraria degli assi. Inoltre, introduciamo due nuove costanti per semplificare la notazione:

$$\frac{1}{p} = \frac{Gm^2M}{L^2} \quad , \quad e = \frac{AL^2}{Gm^2M}$$

allora la soluzione diventa

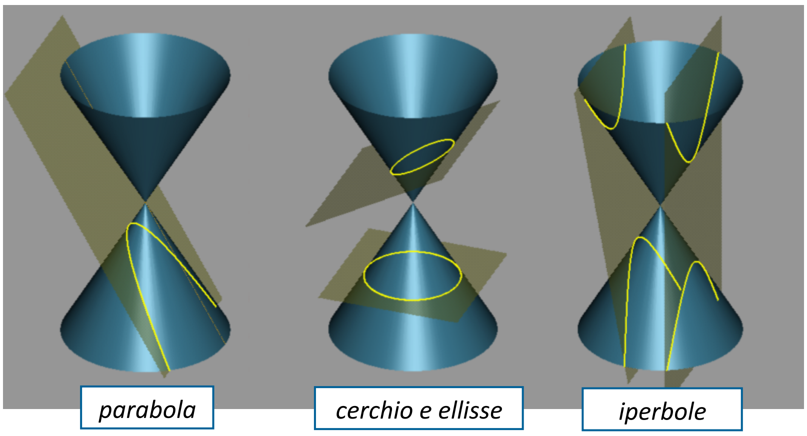
$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta) \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 + e\cos\theta)}}$$

Questa è l'equazione parametrica delle **sezioni coniche !!**

Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 + e\cos\theta)}}$$



Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 + e\cos\theta)}}$$

questa è detta eccentricità

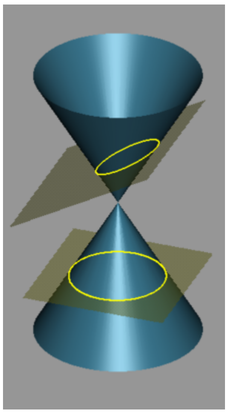
Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 + e\cos\theta)}}$$

$\boxed{e = 0}$ ⇒ Orbita circolare.
La distanza $r = p$ è costante.

$\boxed{0 < e < 1}$ ⇒ Orbite ellittiche.
La distanza r è compresa tra $p/(1\text{-}e)$ e $p/(1+e)$. L'origine del campo coincide con un fuoco dell'ellisse.



In entrambi i casi sono orbite **chiuse**.

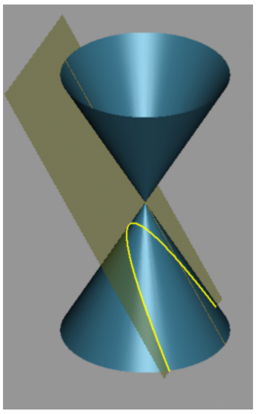
Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1+e\cos\theta)}}$$

$\boxed{e = 1}$

Orbita parabolica. La distanza minima è $p/2$, la massima diverge.



Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

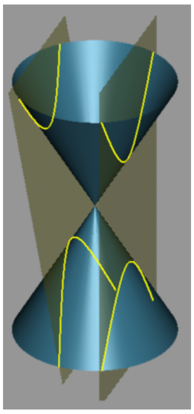
$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1+e\cos\theta)}}$$

$\boxed{e = 1}$

Orbita parabolica. La distanza minima è $p/2$, la massima diverge.

$\boxed{e > 1}$

Orbite iperboliche. La distanza r minima è $p/(1+e)$, la massima diverge.

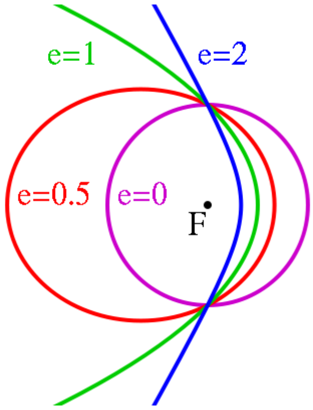


In entrambi i casi sono orbite **aperte**.

Problema di Keplero

La traiettoria della particella è una delle sezioni coniche

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 + e\cos\theta)}}$$

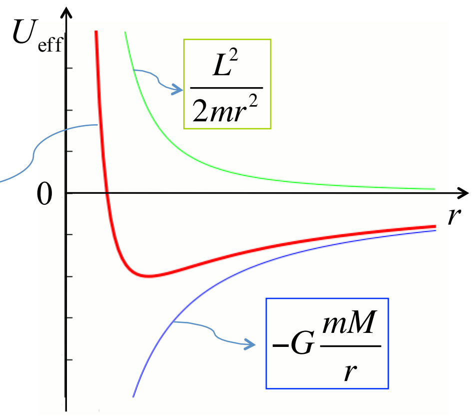


Problema di Keplero

Dal punto di vista qualitativo la differenza tra le orbite si capisce facilmente dal diagramma dell'energia.

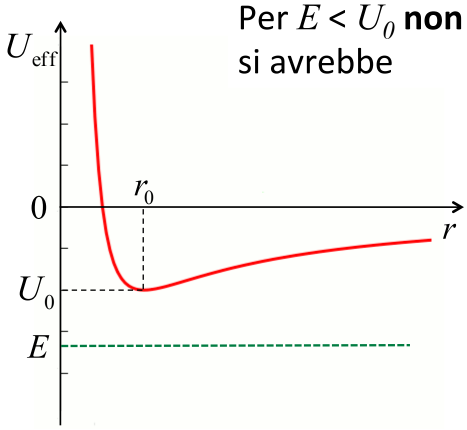
$$\frac{1}{2}mv_r^2 + U_{\text{eff}}(r) = E$$

$$\boxed{U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}}$$



Problema di Keplero

Fissiamo L e consideriamo diversi valori di E.



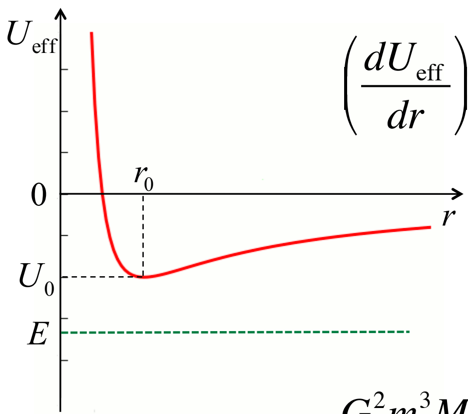
Per $E < U_0$ **non** esiste soluzione, dato che si avrebbe

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = E - U_{\text{eff}}(r) < 0$$

Ma l'energia cinetica non può essere negativa **!!**

Problema di Keplero

Il minimo di U_{eff} si trova così:



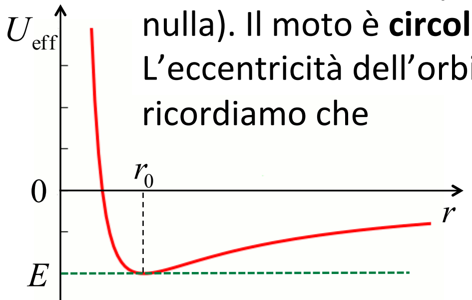
$$\left(\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}\right)_{r_0}$$

$$= -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{GmM}{r_0^2} = 0$$

$$r_0 = \frac{L^2}{Gm^2M} = p$$

$$U_0 = -\frac{G^2m^3M^2}{2L^2}$$

Problema di Keplero



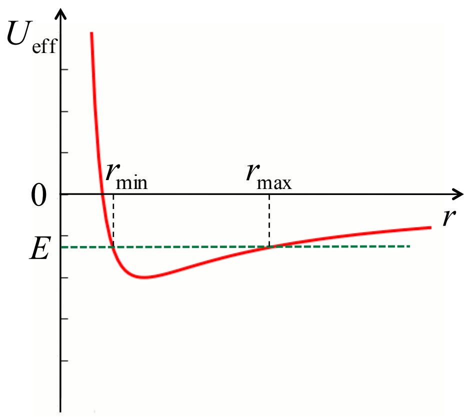
Per $E=U_0$ è ammessa solo la soluzione con raggio costante $r=r_0=p$ (energia cinetica radiale nulla). Il moto è **circolare** uniforme. L'eccentricità dell'orbita è nulla. Inoltre, ricordiamo che

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L$$

e dunque abbiamo

$$E = U_0 = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GmM}{r_0} = \frac{1}{2} m \underbrace{r_0^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{v_\theta^2} - \frac{GmM}{r_0}$$

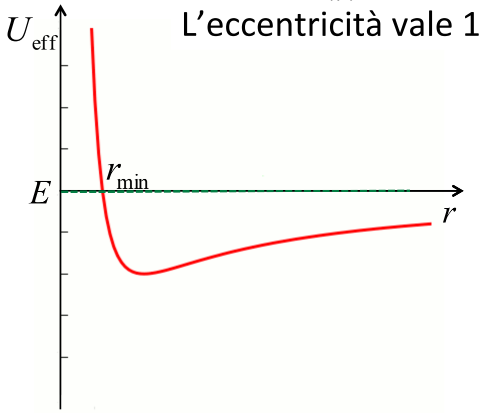
Problema di Keplero



Per $U_0 < E < 0$ l'orbita è compresa tra una distanza minima (perielio, perigeo, ecc.) e una distanza massima (afelio, apogeo, ecc.). Solo in questi punti l'energia cinetica radiale è nulla. l'orbita è **ellittica**, chiusa. L'eccentricità è data da

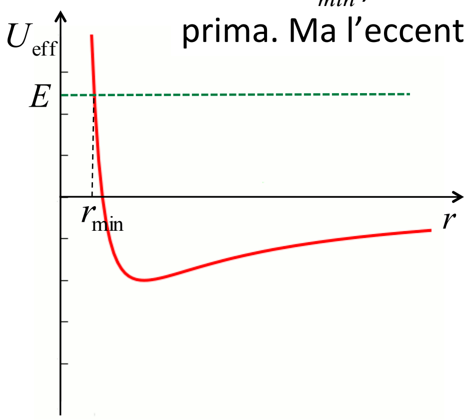
$$e = \frac{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}$$

Problema di Keplero



Per $E = 0$ l'orbita è aperta, con una distanza minima r_{min}, ma non una massima. L'eccentricità vale 1. L'energia cinetica radiale tende a zero quando la distanza tende all'infinito. La traiettoria non ha rette asintotiche.
È una **parabola**.

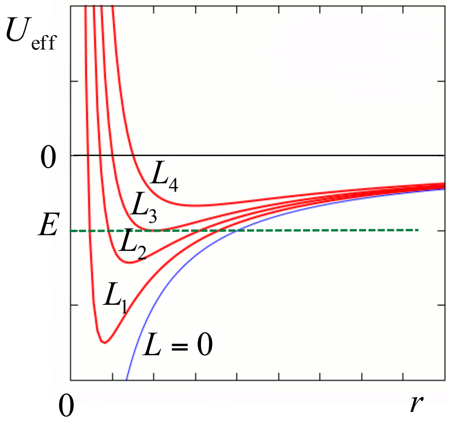
Problema di Keplero



Per $E > 0$ l'orbita è aperta, con una distanza minima r_{min}, ma non una massima, come prima. Ma l'eccentricità è maggiore di 1 e l'energia cinetica radiale tende ad un valore costante non nullo quando la distanza va all'infinito. La traiettoria ammette quindi due rette asintotiche che corrispondono al moto uniforme libero.
È un'**iperbole**.

Problema di Keplero

Possiamo variare il tipo di orbita anche fissando il valore di E, ma variando il valore di L. Nella figura mostriamo le curve per diversi valori



$$0 < L_1 < L_2 < L_3 < L_4$$

Per $L=L_4$ nessuna soluzione.
Per $L=L_3$ orbita circolare.
Per $L=L_2$ e L_1 orbita ellittica.
Per $L=0$ moto di caduta libera in direzione radiale.

Problema di Keplero

Esempi di orbite ellittiche: pianeti

Pianeta	distanza media (AU)*	periodo (anni)	eccentricità
Mercurio	0.39	0.24	0.206
Venere	0.72	0.62	0.007
Terra	1	1	0.017
Marte	1.52	1.88	0.093
Giove	5.2	11.86	0.048
Saturno	9.54	29.46	0.054
Urano	19.22	84.01	0.047
Nettuno	30.06	164.8	0.009

* AU: unità astronomica = 149 597 870 700 m

Problema di Keplero

Esempi di orbite circolari: satelliti geostazionari

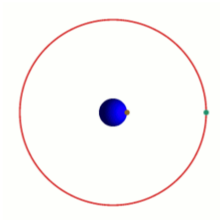


foto Eumetsat

Problema di Keplero

Esempi di orbite circolari: satelliti geostazionari

$$L = mr_0 v = mr_0^2 \omega = mr_0^2 2\pi / T$$

periodo= 1 giorno

$$r_0 = \frac{L^2}{Gm^2 M_T}$$

massa della terra

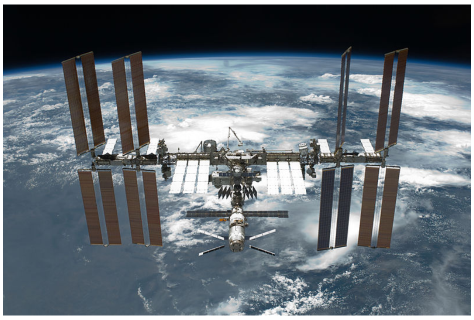
$$\boxed{r_0 = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}}$$

Non dipende dalla massa del satellite e vale $r_0 = 42168 \text{ Km}$

foto Eumetsat

Problema di Keplero

Esempi di orbite (quasi) circolari: ISS



$$r_0 = R_T + h$$

$$R_T \cong 6370 \text{ Km}$$

$$h = 376 \div 398 \text{ Km}$$

$$T = \left(\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T} \right)^{1/2} \approx 91 \text{ min}$$

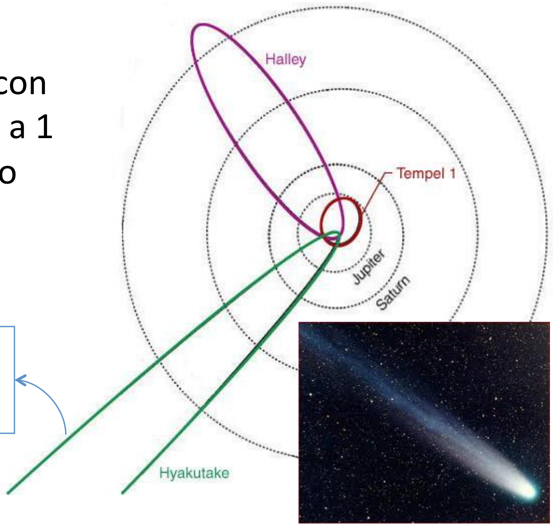
Il giro del mondo in 91 minuti, alla velocità di circa 7700 m/s (27740 km/h).

Problema di Keplero

Esempi di orbite (quasi) paraboliche: comete

Le orbite sono ellissi con eccentricità prossima a 1 per le comete di lungo periodo.

periodo ≈ 70000 anni
eccentricità= 0.9998946
ultimo passaggio = 1996



Problema di Keplero

In sintesi, grazie ai principi di Newton e all'espressione della forza gravitazionale, siamo in grado di risolvere il problema del moto planetario, ma non solo.

Si riottengono le leggi di Keplero, che erano state introdotte su basi empiriche, ma ora trovano una giustificazione più profonda in termini di principi fisici.

Si ottengono anche risultati nuovi, che vanno oltre le leggi di Keplero e mostrano come la teoria abbia un forte potere predittivo.

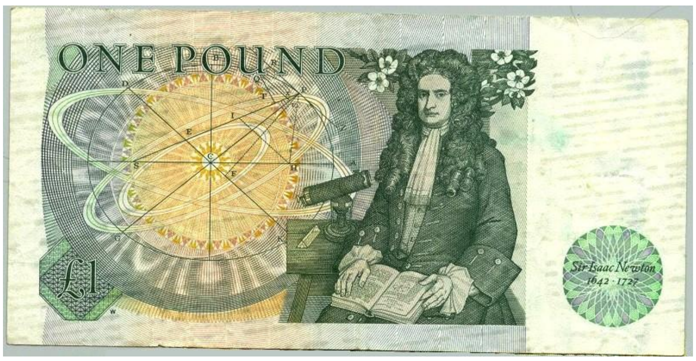
Principio d'inerzia

+ $m\vec{a} = \vec{F}$

+ azione e reazione

+ forza gravitazionale

= nuova visione del mondo e del sapere



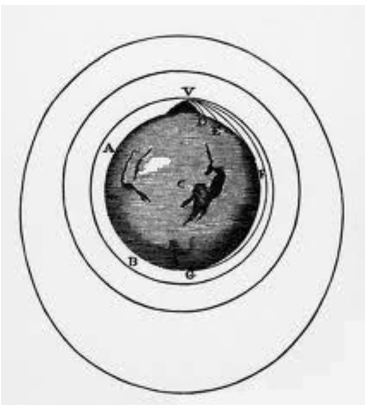
Velocità di fuga

Prima di chiudere l'argomento,
ecco una domanda interessante:

A quale velocità si deve essere lanciati da un pianeta per uscire dal suo campo di gravità?

Uhmm, bisognerà immettersi in un'orbita aperta, libera…

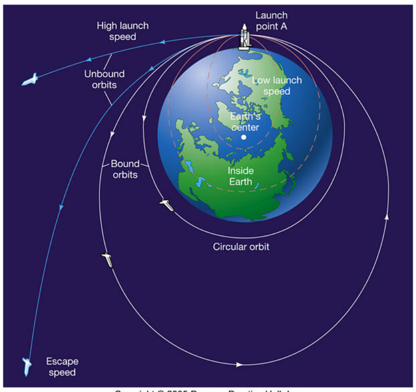
Velocità di fuga



Ecco come Newton vedeva il legame tra "caduta" e "orbita".

Al di sotto di una certa velocità iniziale le orbite sono chiuse.

Velocità di fuga



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

L'orbita di fuga è l'orbita parabolica, con energia meccanica nulla. Dunque, la condizione critica è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(R)$$

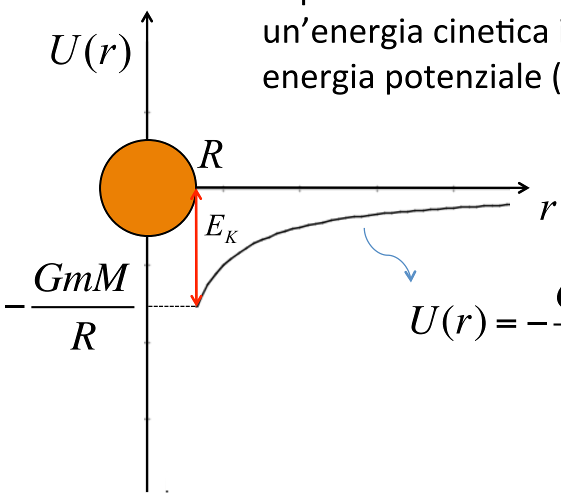
$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = 0$$

da cui

$$v = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}$$

Velocità di fuga

In pratica occorre dare al veicolo un'energia cinetica iniziale pari alla sua energia potenziale (che è negativa).



$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

Velocità di fuga

$$v = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}$$

Qui M e R sono la massa e il raggio del pianeta, e g è la sua accelerazione di gravità in prossimità della superficie.

Nel caso della terra la velocità di fuga è

$$v = (2gR)^{1/2} = (2 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m})^{1/2}$$
$$\cong 11200\,\mathrm{m/s} \cong 40000\,\mathrm{Km/h}$$

e non dipende dalla massa dei veicolo lanciato **!!**

Velocità di fuga

Per il sole:

$$v = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}$$
$$\approx \left(\frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{7 \times 10^8}\right)^{1/2} \mathrm{m/s}$$
$$\approx 6 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$$

Non è molto più grande che per la terra, perchè il rapporto M/R è più grande di un fattore circa 3000, e prendendo la radice quadrata diventa un fattore 50 soltanto.

Velocità di fuga

Ma se la massa del sole fosse concentrata in una sfera di una decina di chilometri di raggio, come nelle stelle a neutroni, allora si avrebbe:

$$v \approx \left(\frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{10^4} \right)^{1/2} \text{ m/s} \approx 10^8 \text{ m/s}$$

È circa un terzo della velocità della luce

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

E se la velocità di fuga fosse superiore a c **??**
Si otterrebbe un **buco nero !!**

Velocità di fuga

Si ha un buco nero, per definizione, quando una massa M è concentrata entro una sfera di raggio R tale che

$$v = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2} > c \quad \Rightarrow \quad R < R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Raggio di Schwarzschild

Per la terra il raggio di Schwarzschild è circa 1 cm, per il sole è circa un chilometro e mezzo.