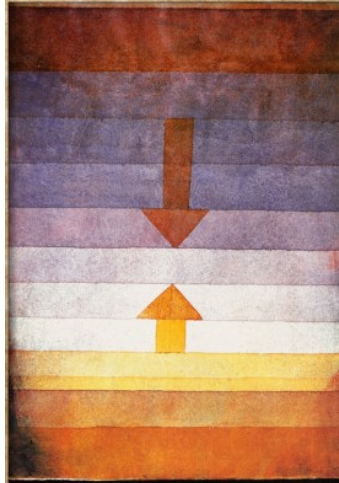


Sistemi di due particelle



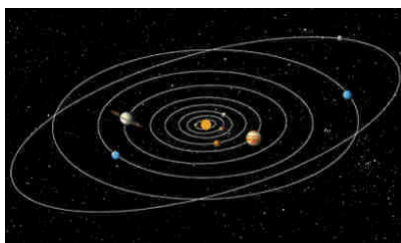
Problema a 2 o più corpi

Finora, salvo qualche rara eccezione, abbiamo considerato la dinamica di **una sola particella** sottoposta a forze assegnate. Le leggi di Newton per la dinamica del **punto materiale** ci dicono come si può risolvere il problema del moto.

Le situazioni in cui si ci può limitare a studiare il moto di una sola particella in un ambiente statico sono rare. In generale occorre considerare anche il **movimento simultaneo di tutte le particelle che interagiscono** tra loro.

Problema a 2 o più corpi

Ad esempio, nel caso gravitazionale, assumere che il sole sia fermo e ciascun pianeta si muova attorno ad esso indipendentemente dagli altri è solo una prima un' **approssimazione** della situazione reale, dove il sole in realtà si muove per effetto della sua interazione con i pianeti e, inoltre, i pianeti interagiscono tra loro.

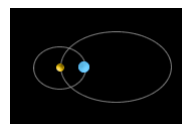


Problema a 2 o più corpi



Nel caso della luna e della terra l'effetto è più evidente. Entrambi i corpi sono accelerati dalla reciproca interazione e il moto della terra non è trascurabile. È un tipico **problema a 2 corpi**.

Un problema a 2 corpi esemplare è quello delle **stelle binarie**, con masse confrontabili.



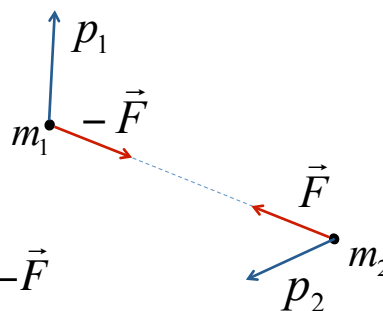
Problema a 2 corpi

Cominciamo a trattare il caso più semplice di un problema a **2 corpi interagenti solo tra loro**.

Abbiamo già visto questa situazione quando parlavamo del principio di azione e reazione.

Equazioni del moto:

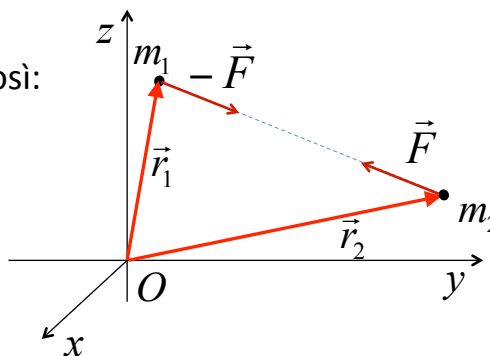
$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\vec{F} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F} \end{cases}$$



Problema a 2 corpi

Possono essere riscritte così:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} \end{cases}$$



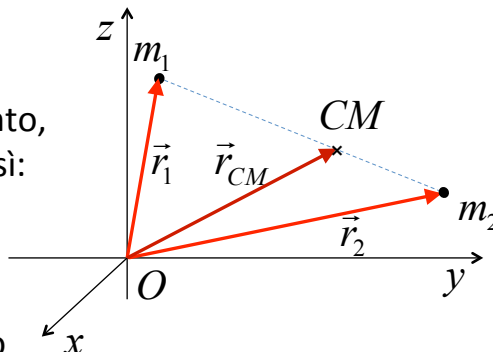
Se sommate, danno

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

Problema a 2 corpi

Possiamo definire la posizione di un nuovo punto, detto **centro di massa**, così:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



In questo modo il risultato precedente diventa:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = 0$$

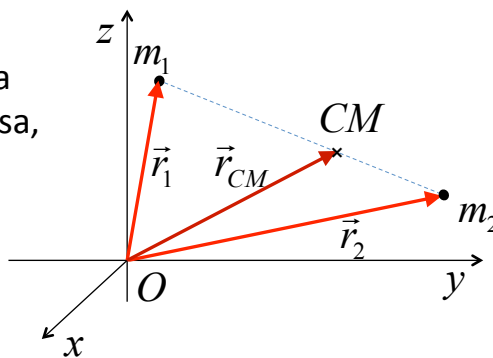
$$\leftarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

Il centro di massa si comporta come una particella libera indipendentemente dalla forza F interna al sistema !!

Problema a 2 corpi

Possiamo definire anche la **velocità** del centro di massa, così:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} &= \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) \\ &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}}{M} \end{aligned}$$



quantità di moto totale:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

massa totale:

$$M = m_1 + m_2$$

Problema a 2 corpi

Dunque, per definizione

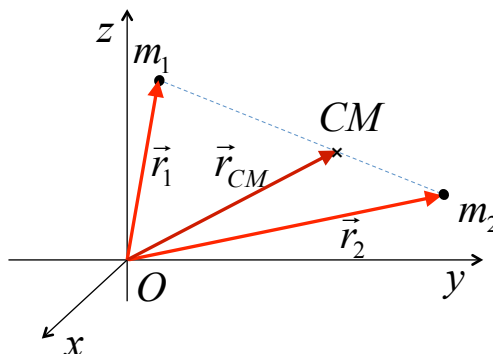
$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$$

L'accelerazione del CM è

$$\begin{aligned} \vec{a}_{CM} &= \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \\ &= \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \frac{1}{M} \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \end{aligned}$$

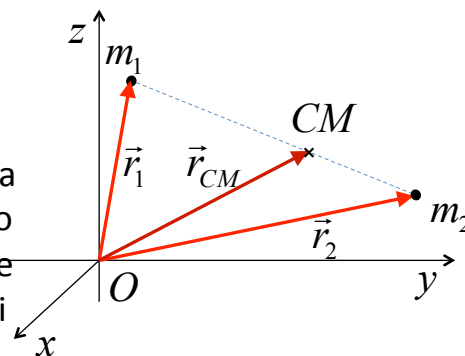
ma l'equazione del moto ci diceva che

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = 0, \quad \vec{P} = \text{costante}$$



Problema a 2 corpi

Quindi, se le due particelle interagiscono **solo** tra loro, allora il loro CM si comporta come una particella in moto libero, a velocità costante, e la quantità di moto totale si conserva.

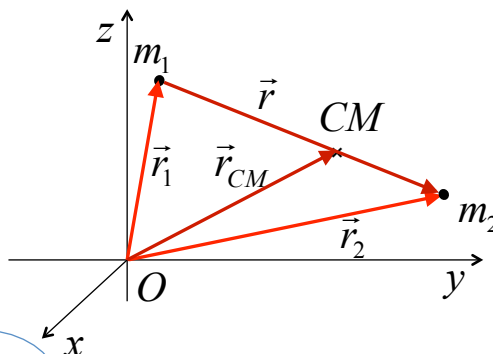


Il CM si trova sempre tra le due particelle, lungo la congiungente. Infatti...

Problema a 2 corpi

... infatti, si vede che

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ &= \vec{r}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}\end{aligned}$$



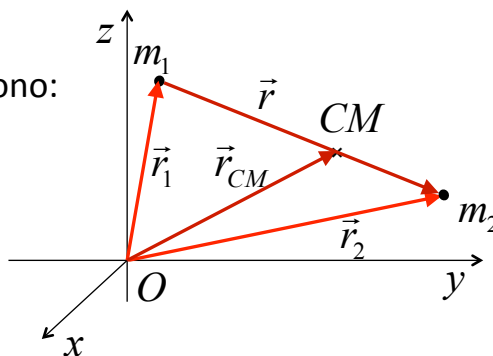
Si aggiunge alla posizione di ciascuna particella un vettore diretto come la congiungente!

Avendo definito la posizione relativa $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Problema a 2 corpi

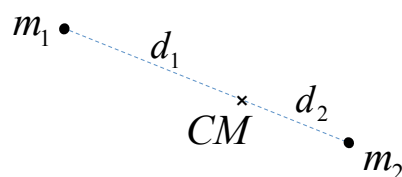
e le espressioni inverse sono:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}\end{aligned}$$



Da queste segue anche che le distanze delle due particelle dal CM sono inversamente proporzionali alle masse:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$



Problema a 2 corpi

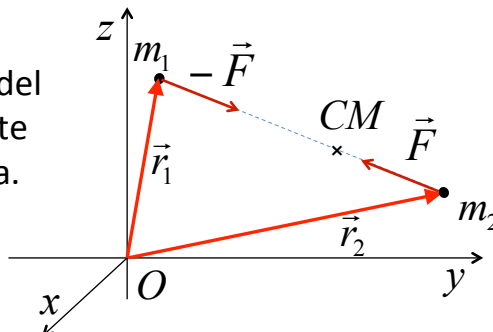
Nell'equazione del moto del CM la forza interna, agente tra le particelle, non entra.

Dove entra?

Nel moto relativo!!

Basta ripartire dalle equazioni del moto iniziali:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} \end{cases}$$



Invece di farne la somma, come prima, ora ne facciamo la differenza dopo aver diviso per m_1 la prima e per m_2 la seconda.

Problema a 2 corpi

Si ottiene

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}$$

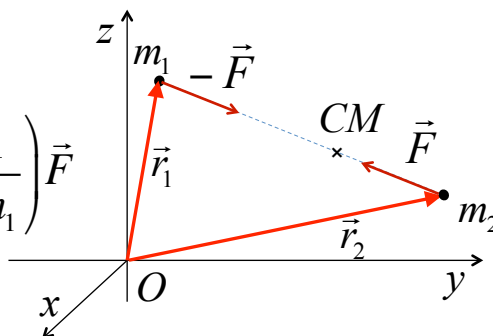
ovvero

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}$$

Possiamo introdurre una nuova massa in modo che

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



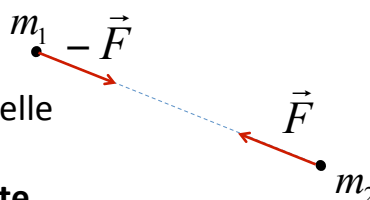
Problema a 2 corpi

Risultato finale: il moto relativo delle due particelle è governato da un'equazione del moto **equivalente** all'equazione del moto per **una sola** particella di **massa ridotta** μ soggetta ad una forza \vec{F}

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Abbiamo ridotto il problema da 2 corpi a 1 corpo !!



Problema a 2 corpi

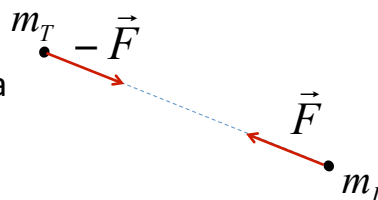
Esempio: moto relativo terra-luna

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_T m_L}{r^2} \hat{u}_r$$

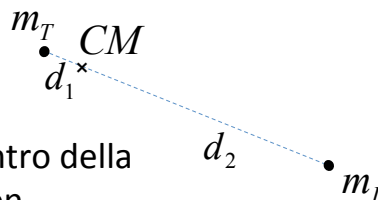
È il solito problema di Keplero. La posizione relativa descrive un'orbita ellittica, quella che compete ad una particella di massa ridotta

$$\mu = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L} = \frac{m_L}{1 + m_L / m_T} \cong \frac{m_L}{1 + (1/81)}$$

soggetta alla forza attrattiva $-Gm_T m_L / r^2$.



Problema a 2 corpi



Il CM si trova a distanza d_1 dal centro della terra e d_2 dal centro della luna, con

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_L}{m_T} \cong \frac{1}{81}$$

e, dato che la distanza complessiva è dell'ordine di 380000 Km, la distanza dal centro della terra è circa 4700 Km, un po' meno del raggio terrestre. Il CM è interno alla terra, più vicino alla superficie che al centro.

Problema a 2 corpi

Dunque, nota la posizione del CM e risolta l'equazione del moto per la posizione relativa, la posizione della terra e della luna nel tempo si trovano dalle relazioni:

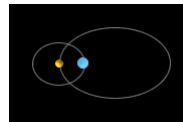
$$\vec{r}_T = \vec{r}_{CM} - \frac{m_L}{m_T + m_L} \vec{r}$$

$$\vec{r}_L = \vec{r}_{CM} + \frac{m_T}{m_T + m_L} \vec{r}$$

Terra e luna descrivono delle ellissi intorno al CM comune, di uguale (e piccola) eccentricità e semiassi in proporzione al rapporto m_L/m_T .

Problema a 2 corpi

Esempio: stelle binarie



Quanto detto per la terra e la luna si applica allo stesso modo al caso di stelle binarie: ciascuna stella compie un moto ellittico attorno al CM comune. Se le masse sono confrontabili, anche le ellissi avranno dimensioni confrontabili.

Se le due stelle hanno massa esattamente uguale, le ellissi sono identiche e la massa ridotta è uguale alla metà della massa di ciascuna stella.

Problema a 2 corpi

Casi limite:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$m_1 = m_2 = m$
 \rightarrow
 $\mu = \frac{m}{2}, \quad d_1 = d_2$

$m_1 \gg m_2 = m$
 \rightarrow
 $\mu \cong m, \quad d_1 \cong 0$

Problema a 2 corpi

In sintesi: se due corpi interagiscono **solo tra loro** (sistema isolato) allora le due equazioni del moto

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} \quad , \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}$$

danno un moto libero per il CM

$$\vec{a}_{CM} = 0 \quad , \quad \vec{P} = \text{costante}$$

e l'equazione

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

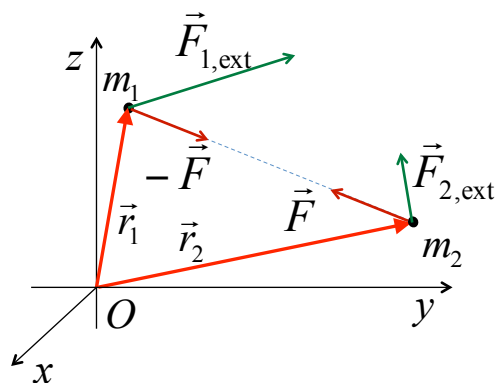
per la posizione relativa.

Problema a 2 corpi

Ma se ci sono anche forze esterne al sistema?

Le equazioni del moto sono queste:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_{2,\text{ext}} \end{array} \right.$$



Problema a 2 corpi

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_{2,\text{ext}} \end{cases}$$

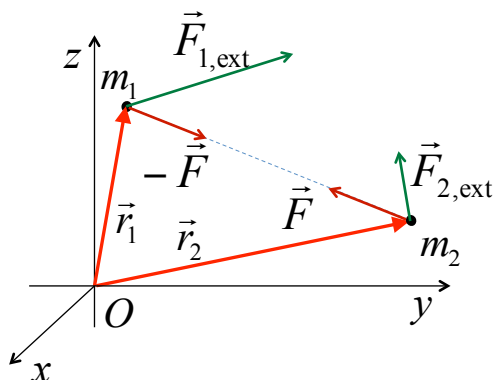
Sommandole si ottiene

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}}$$

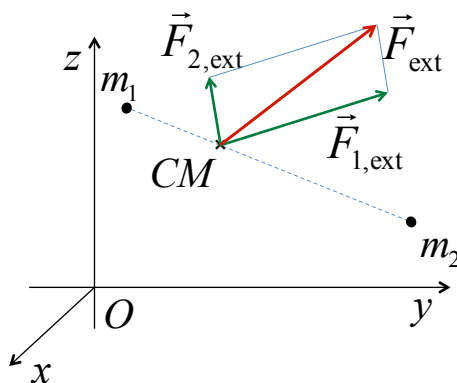
ovvero

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\text{con } \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}}$$

**Problema a 2 corpi**

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

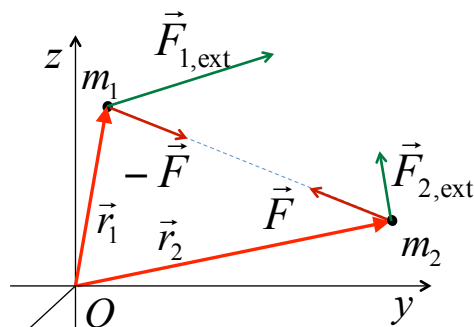


Il CM si muove come una particella di massa pari alla massa totale del sistema soggetta alla risultante delle sole forze esterne !!

Le forze interne non hanno effetti sul moto del CM.

Problema a 2 corpi

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F} + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_{2,\text{ext}} \end{cases}$$



Per il moto relativo invece

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_{1,\text{ext}} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_{2,\text{ext}}$$

e il problema è **più complicato** rispetto al caso del sistema isolato. Infatti, in generale, le forze esterne dipendono dalle coordinate \vec{r}_1 e \vec{r}_2 incognite !!

Problema a 2 corpi

C'è un tipo di forza esterna per cui il problema rimane semplice: la forza peso $\vec{F}_{1,\text{ext}} = m_1 \vec{g}$, $\vec{F}_{2,\text{ext}} = m_2 \vec{g}$

In questo caso infatti l'equazione

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_{1,\text{ext}} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_{2,\text{ext}}$$

diventa $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \mu \vec{g} + \mu \vec{g} = \vec{F}$

e il moto relativo è determinato solo dalle forze interne !!

[nota: lo stesso vale per le forze apparenti in un sistema di riferimento uniformemente accelerato]

Problema a 2 corpi

Dunque, **due particelle in un campo di gravità uniforme** e interagenti tra di loro si comportano in questo modo:

Il **centro di massa** si muove soggetto alla forza peso che compete ad una particella di massa $M = m_1 + m_2$

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = M \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{g}$$

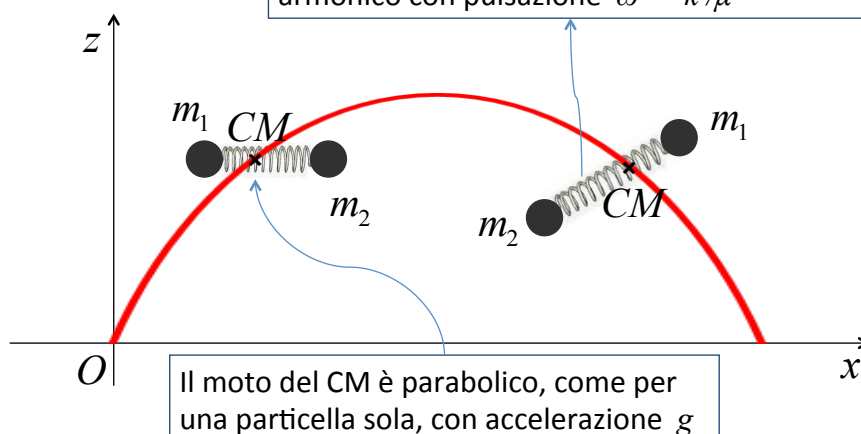
La **posizione relativa** si comporta come la posizione di una particella di massa ridotta soggetta alla sola forza interna

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Problema a 2 corpi

Esempio:

La forza interna è elastica e il moto relativo è armonico con pulsazione $\omega^2 = k/\mu$



Il moto del CM è parabolico, come per una particella sola, con accelerazione g

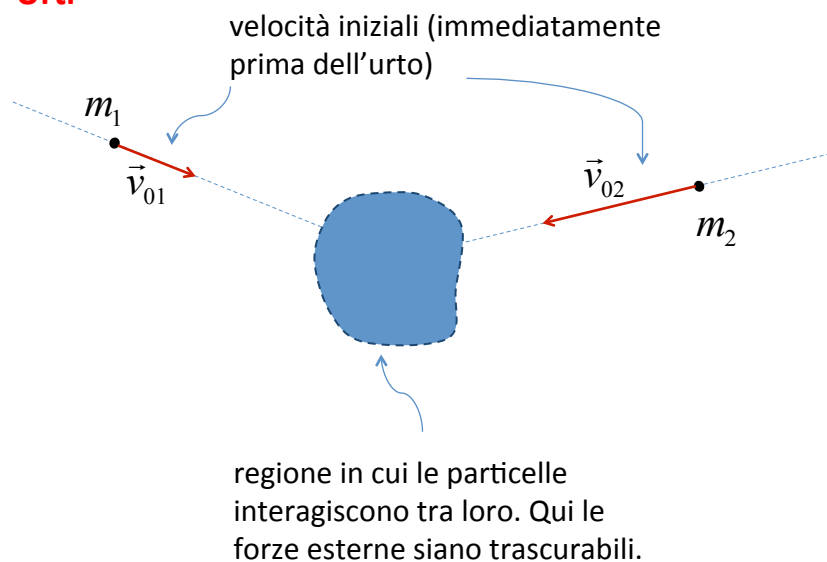
[nota sul sistema terra-luna nel campo gravitazionale del sole]

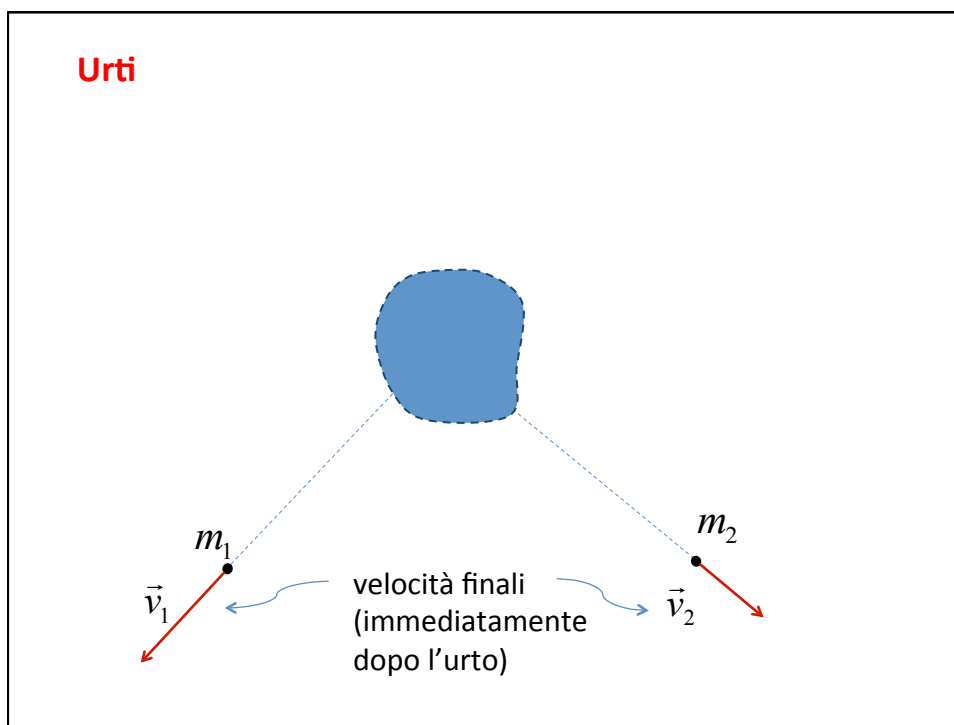
Urti

C'è un altro caso interessante in cui si possono trascurare le forze esterne: **urti** (in approssimazione impulsiva).

La situazione tipica è la seguente: due particelle, **inizialmente distanti** l'una dall'altra, seguono traiettorie tali da trovarsi **vicine per un certo intervallo di tempo ed entro una certa regione di spazio**. Supponiamo che l'interazione reciproca, in quell'intervallo e in quella regione, sia **molto più grande** delle forze esterne. Questa è l'**approssimazione d'urto** (o impulsiva).

Urti





Urti

Il problema dell'urto consiste nel trovare la relazione tra velocità iniziale e finale delle particelle.

Se le forze esterne trascurabili durante l'urto, allora il CM si muoverà a velocità costante e la posizione relativa obbedirà all'equazione

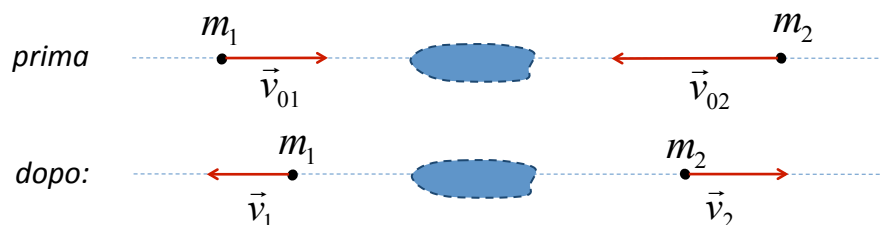
$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

dove la forza dipende, in generale, dalla distanza relativa.

Invece di risolvere l'equazione del moto, spesso può essere più conveniente usare leggi di conservazione !!

Urti

Esempio: urto unidimensionale

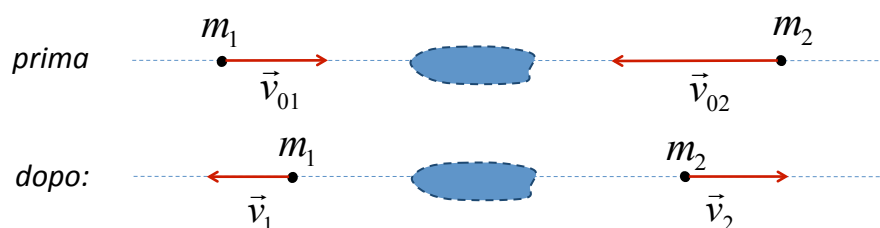


Dato che le forze esterne sono trascurabili, si può applicare la conservazione della quantità di moto totale:

$$\vec{P} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}_{\text{prima}} = \underbrace{m_1 v_1 + m_2 v_2}_{\text{dopo}}$$

Urti

Esempio: urto unidimensionale



Se si conserva anche l'energia cinetica, allora l'urto viene detto **elastico** e si può scrivere:

$$E_K = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2}_{\text{prima}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{\text{dopo}}$$

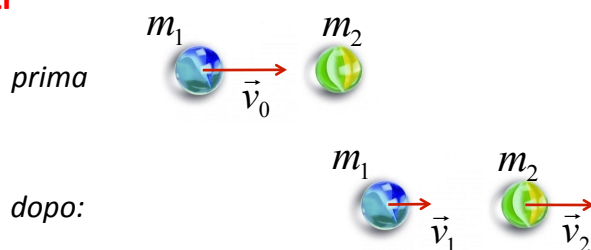
Urti

Dunque, se l'urto è **unidimensionale** ed **elastico**, e sono note le velocità iniziali, allora le velocità finali si possono calcolare risolvendo le due equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2 \end{cases}$$

Come esempio, mettiamoci nel caso semplice in cui una delle due particelle è inizialmente ferma e risolviamo le equazioni.

Urti

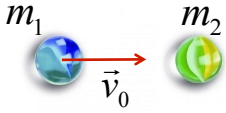


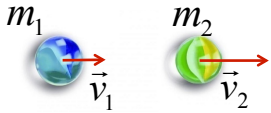
Conservazione di E_K e di P :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_0 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_0 \end{aligned}$$

[*passaggi algebrici alla lavagna*]

Urti

prima  $v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_0$

dopo:  $v_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_0$

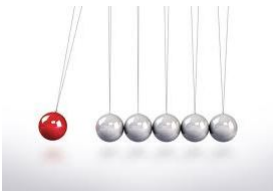
Primo caso particolare interessante: masse uguali.

$m_1 = m_2 = m \rightarrow v_1 = 0$
 $v_2 = v_0$

La prima si ferma e la seconda parte con la stessa velocità che aveva la prima.

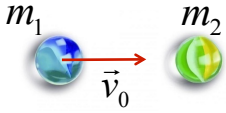
Urti

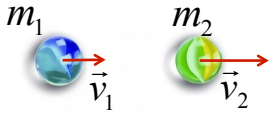
Possiamo realizzare urti in sequenza di masse uguali. Il risultato non dipende dalla distanza tra le biglie. L'ultima si prende tutta l'energia cinetica iniziale e tutta la quantità di moto. Le altre stanno ferme.



pendolo di Newton

Urti

prima 

dopo: 

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_0$$

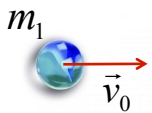
$$v_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_0$$

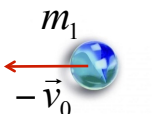
Altro caso limite interessante: una massa molto maggiore dell'altra.

$$\frac{m_2}{m_1} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &\cong -v_0 \\ v_2 &\cong 0 \end{aligned}$$

La prima rimbalza invertendo la velocità; la seconda rimane (quasi) ferma.

Urti

prima 

dopo: 

$$\frac{m_2}{m_1} \gg 1$$

$$\downarrow$$

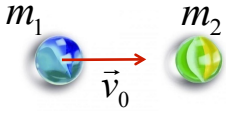
$$v_1 = -v_0$$

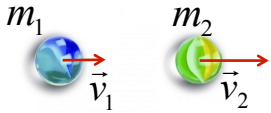
$$v_2 = 0$$

È come un urto contro un muro.

[commento sulla conservazione di P e sull'impulso impresso dal muro]

Urti

prima 

dopo: 

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_0$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_0$$

Infine, possiamo vedere cosa succede al CM nell'urto: la sua velocità non cambia; nel sistema di riferimento del CM le due biglie hanno quantità di moto uguale e opposta; nell'urto le velocità relative al CM cambiano solo di segno.

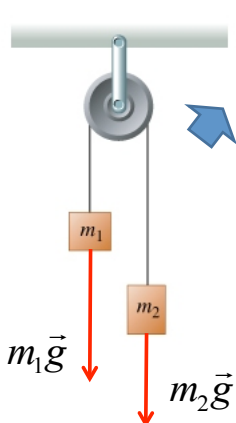
[calcoli alla lavagna]

Urti

Alcune osservazioni finali:

- Se l'energia cinetica non è conservata, l'urto è detto **anelastico**.
- **Non** tutti gli urti sono tali da poter applicare l'approssimazione d'urto; ad esempio, se uno dei corpi che urtano è sottoposto a **reazioni vincolari**, queste possono avere intensità confrontabile con le forze interne durante l'urto stesso. In tal caso la quantità di moto totale non si conserva (ma potrebbero conservarsi altre quantità).
- La macchina di Atwood era un problema a 2 corpi.

Macchina di Atwood (rivisitata)



ai fini della traslazione delle masse è del tutto equivalente a



La tensione del filo è una forza interna e non ha effetto sulla traslazione del CM, che accelera secondo la legge

$$M \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{ext}} = (m_1 - m_2) \vec{g}$$

Quindi si ottiene

$$a_{CM} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

come prima.

Esercizi

Una particella viene lasciata cadere da ferma da un'altezza h . L'urto con il pavimento sia anelastico, in modo che la particella perda una frazione f della sua energia cinetica in ogni urto. In quanto tempo si fermerà? Dopo quanti urti? [es. 5.7 Dalba-Fornasini]

Due particelle identiche possono muoversi su un piano orizzontale liscio. Una ha velocità v_0 e va a urtare l'altra che era ferma. Dimostrare che le direzioni d'uscita dall'urto formano un angolo di 90 gradi.

Una pistola spara un proiettile a velocità v_0 . Qual'è la velocità di rinculo della pistola? 