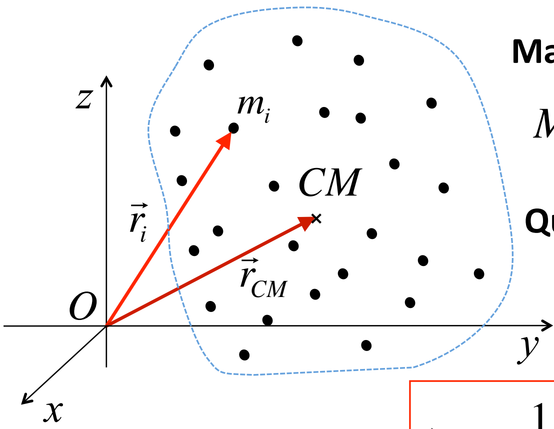
Sistemi di N particelle

Sistemi di N particelle

Ora generalizziamo quanto fatto per due particelle al caso di N particelle, con N qualsiasi.



Massa totale:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

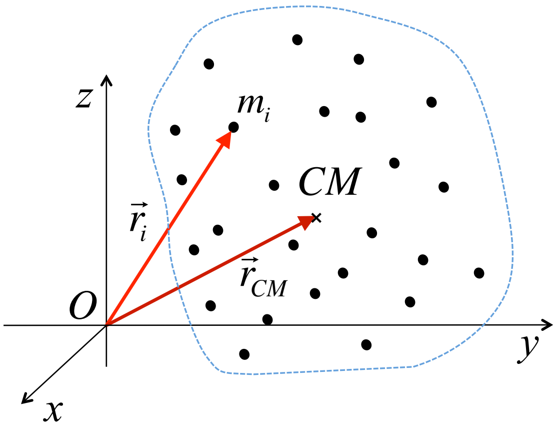
Quantità di moto totale:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Centro di massa: $$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$$

Sistemi di N particelle

Velocità del CM: $\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{M}$

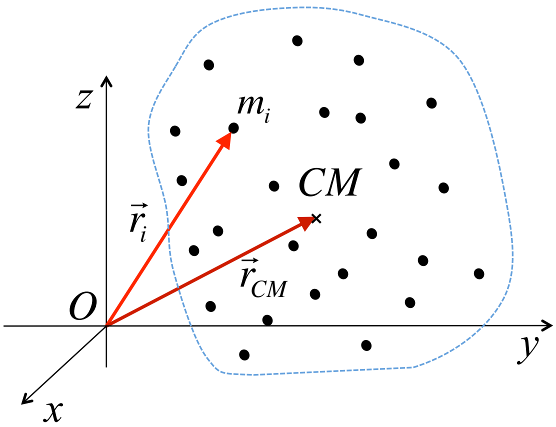


$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}}$$

La quantità di moto totale del sistema è la stessa di una singola particella di massa M che viaggia alla velocità del CM **!!**

Sistemi di N particelle

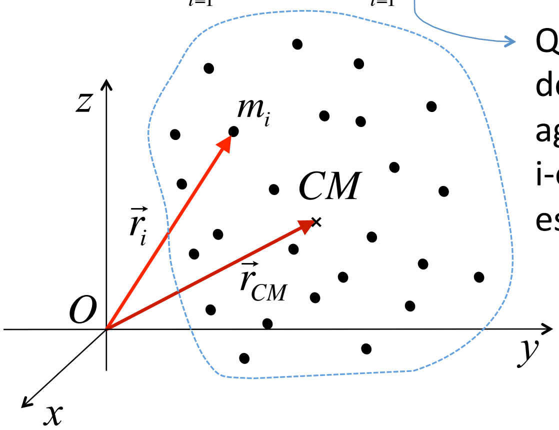
Accelerazione del CM: $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$



Qui possiamo usare la seconda legge di Newton per ciascuna particella i-esima

Sistemi di N particelle

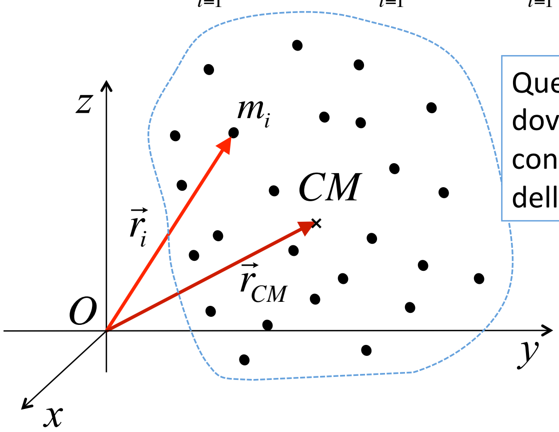
$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$



Questa è la risultante delle forze che agiscono sulla particella i-esima (sia interne che esterne al sistema).

Sistemi di N particelle

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} [(\vec{F}_i)_{\text{int}} + (\vec{F}_i)_{\text{ext}}]$$

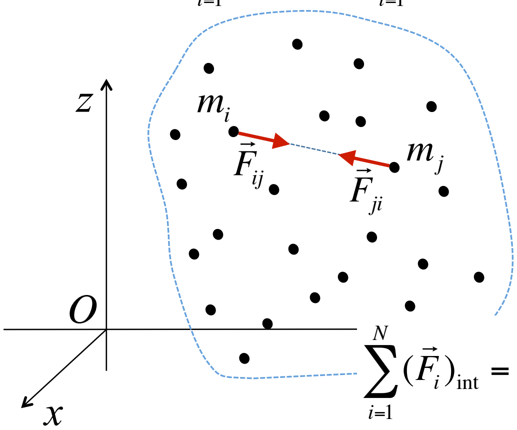


Questa è la forza dovuta all'interazione con le altre particelle dello stesso sistema

Questa è la forza dovuta all'interazione con altre particelle, esterne al sistema.

Sistemi di N particelle

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} [(\vec{F}_i)_{\text{int}} + (\vec{F}_i)_{\text{ext}}]$$



Ma la somma

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{\text{int}}$$

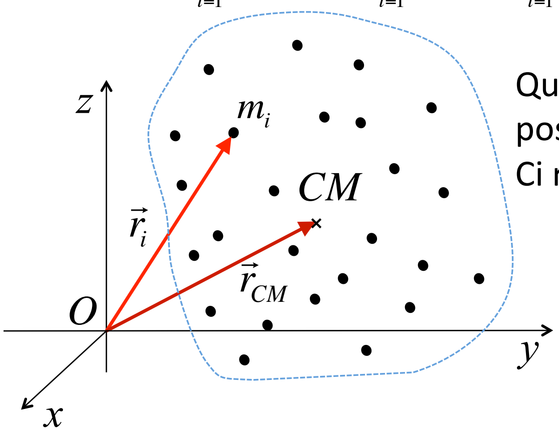
è nulla a causa del principio di azione e reazione applicato a ciascuna coppia di particelle

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{\text{int}} = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{\text{coppie}} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$$

somma sulle coppie, ciascuna presa una sola volta!

Sistemi di N particelle

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} [\cancel{(\vec{F}_i)_{\text{int}}} + (\vec{F}_i)_{\text{ext}}]$$



Quindi queste forze le possiamo togliere da qui **!!**
Ci rimane

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{\text{ext}}$$

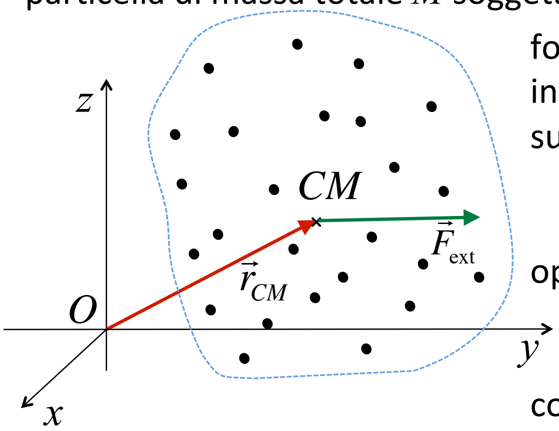
ovvero

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

somma di tutte le forze esterne agenti sulle particelle del sistema

Sistemi di N particelle

Come nel problema a 2 corpi, il CM si comporta come una particella di massa totale M soggetta alla risultante delle forze esterne. Le forze interne non hanno effetto sul moto del CM **!!**



$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}}$$

oppure

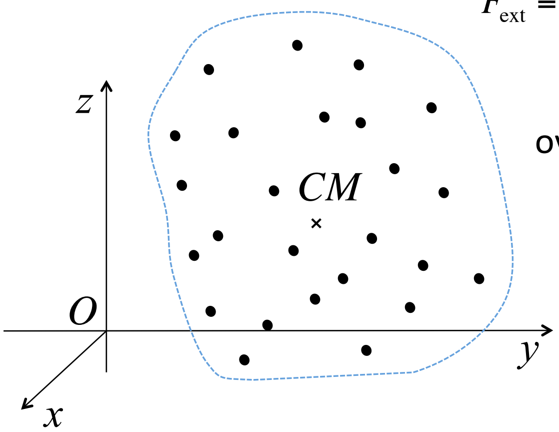
$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}}$$

con

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{ext}$$

Sistema isolato

Un sistema su cui non agiscono forze esterne è detto sistema isolato. In tal caso $\vec{F}_{ext} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a}_{CM} = 0}$



ovvero

$$\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

$$\vec{P} = \text{costante}$$

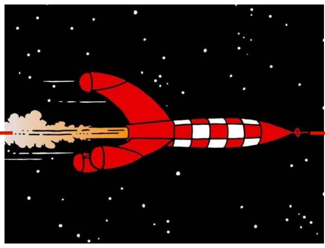
La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva **!!**

[*nota: concetto già discusso nell'introduzione alla dinamica, parlando del principio di azione e reazione*]

Sistema isolato

Esempio:

$$\vec{P} = \vec{p}_{\text{razzo}} + \vec{p}_{\text{gas}}$$



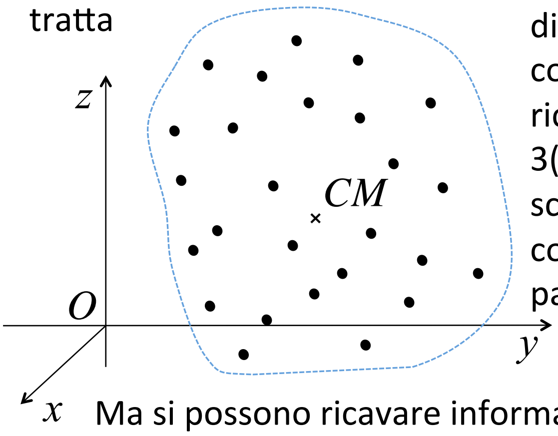
$$\vec{p}_{\text{gas}} = m_{\text{gas}} \vec{v}_{\text{gas}} \qquad \vec{p}_{\text{razzo}} = m_{\text{razzo}} \vec{v}_{\text{razzo}}$$

Gas e razzo possono essere visti come un unico sistema isolato, il cui CM si muove di moto uniforme e la cui quantità di moto totale si conserva. Dunque, per ogni quantità di gas espulso a sinistra, il razzo deve acquistare velocità verso destra in modo da conservare la quantità di moto totale. La conservazione di P fornisce l'equazione differenziale per il moto del razzo.

[*per dettagli si veda l'esempio 2.14 in Knudsen-Hjorth*]

Sistemi di N particelle

Una volta risolto il problema di come si muove il CM, resta da capire com'è il **moto relativo** delle N particelle. Si tratta di un problema molto complicato perché richiede la soluzione di 3(N-1) equazioni del moto scalari accoppiate per le coordinate di tutte le particelle.

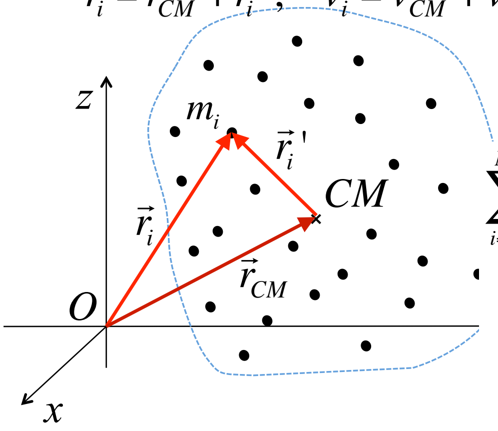


Ma si possono ricavare informazioni utili anche dalla quantità di moto, il momento angolare e l'energia.

Quantità di moto rispetto al CM

Le posizioni e le velocità sono legate da

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i\,' ; \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,' ; \quad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$



quindi

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$$

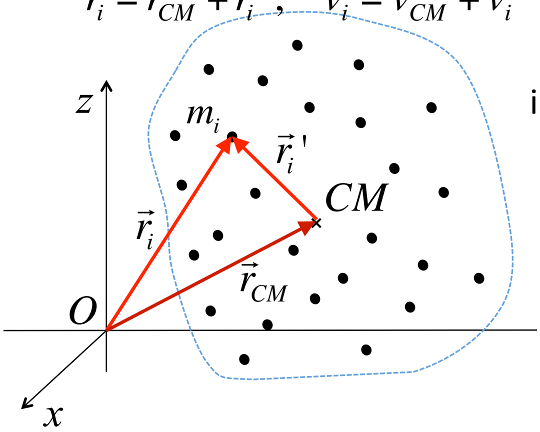
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{r}_{CM}$$

$$= M\,\vec{r}_{CM} - M\,\vec{r}_{CM} = 0$$

Quantità di moto rispetto al CM

Le posizioni e le velocità sono legate da

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i\,' ; \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,' ; \quad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$



inoltre

$$\vec{P}\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,'$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{v}_{CM}$$

$$= \vec{P} - M\,\vec{v}_{CM} = 0$$

Quantità di moto rispetto al CM

In sintesi, le posizioni delle particelle riferite al CM obbediscono alla relazione

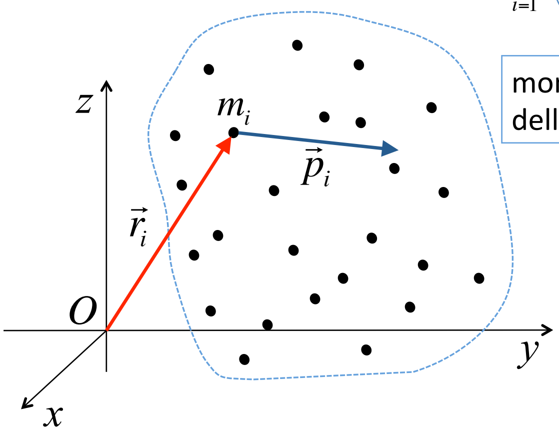
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = 0$$

E la quantità di moto totale del sistema, misurata nel sistema di riferimento del CM, è sempre nulla:

$$\boxed{\vec{P}\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,' = 0}$$

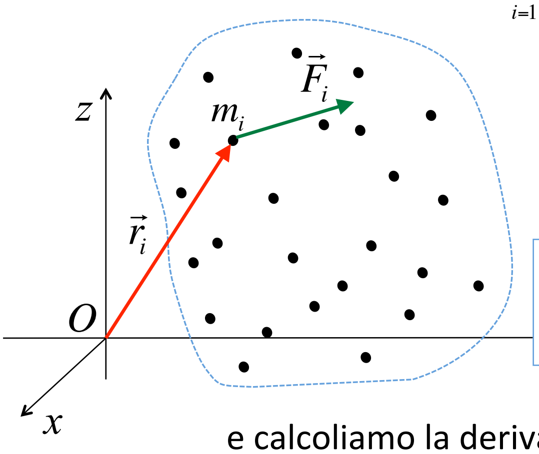
Momento angolare di un sistema di N particelle

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{L}_i}_{\text{momento angolare della particella i-esima}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$



Momento angolare di un sistema di N particelle

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$



Ricordiamoci che

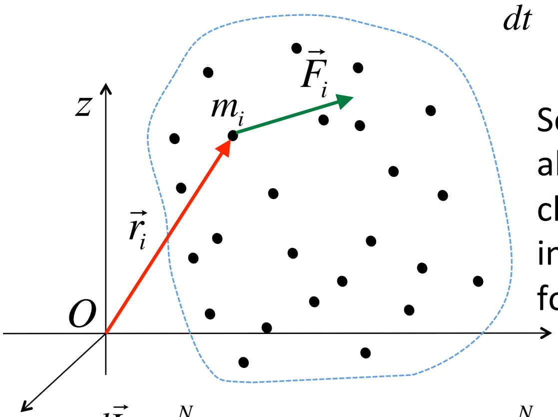
$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_i$$

risultante delle forze che agiscono sulla particella i-esima

e calcoliamo la derivata temporale del momento angolare totale del sistema.

Momento angolare di un sistema di N particelle

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

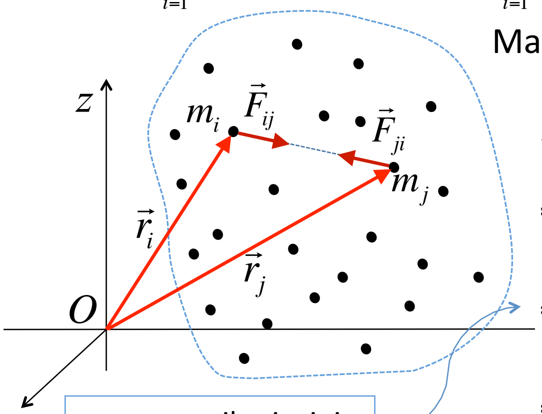


Separiamo il contributo al momento delle forze che viene dalle forze interne da quello delle forze esterne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times [(\vec{F}_i)_{\text{int}} + (\vec{F}_i)_{\text{ext}}] = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i)_{\text{int}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i)_{\text{ext}}$$

Momento angolare di un sistema di N particelle

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times[(\vec{F}_i)_{\text{int}}+(\vec{F}_i)_{\text{ext}}]=\sum_{i=1}^{N}\cancel{\vec{r}_i\times(\vec{F}_i)_{\text{int}}}+\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(\vec{F}_i)_{\text{ext}}$$



Ma la prima somma è nulla:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(\vec{F}_i)_{\text{int}}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij})$$

$$=\sum_{\text{coppie}}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{F}_{ji})$$

$$=\sum_{\text{coppie}}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}-\vec{r}_j\times\vec{F}_{ij})$$

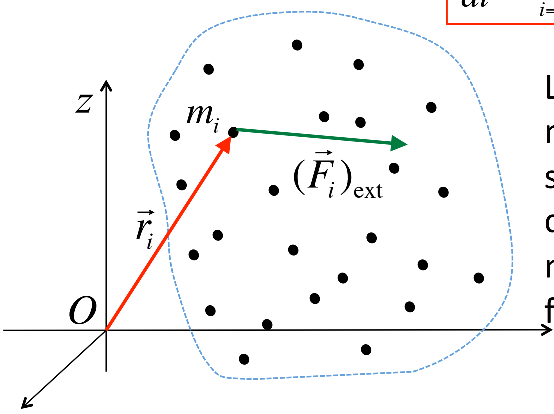
$$=\sum_{\text{coppie}}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}=0$$

ancora per il principio di azione e reazione

sono vettori paralleli

Momento angolare di un sistema di N particelle

Risultato finale: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(\vec{F}_i)_{\text{ext}}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}}$

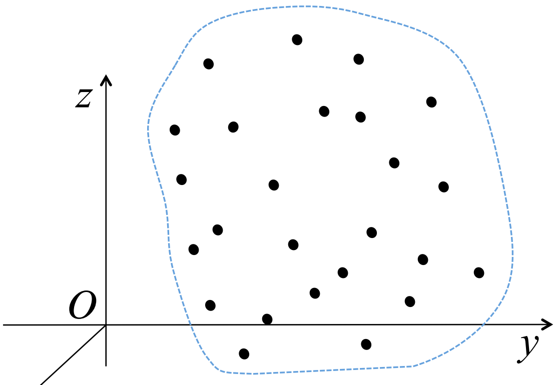


La variazione del momento angolare del sistema è determinata dalla somma dei momenti delle **sole** forze esterne **!!**

Le forze interne, di qualsiasi tipo siano, non possono variare il momento angolare totale **!!**

Momento angolare di un sistema di N particelle

Caso particolare: sistema isolato (nessuna forza esterna)



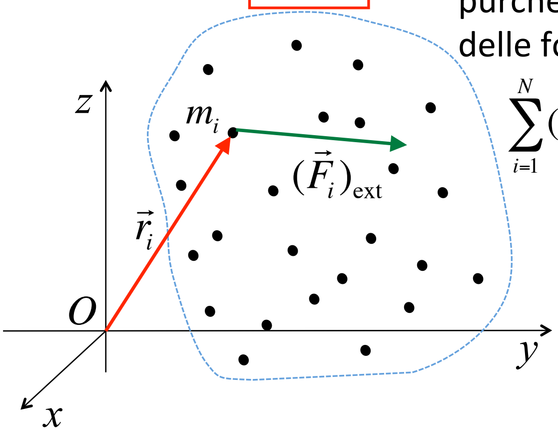
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$

In un sistema isolato il momento angolare si conserva **!!**

Si aggiunge alla conservazione della quantità di moto, già vista prima $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = 0}$

Momento angolare di un sistema di N particelle

Notiamo che $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$ vale anche per sistemi non isolati purché la somma dei momenti delle forze esterne sia nulla.

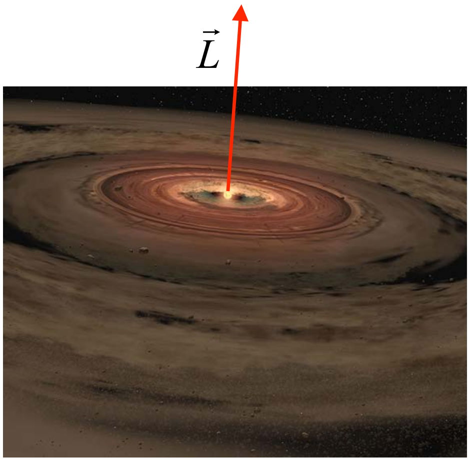


$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i)_{\text{ext}} = 0$$

Momento angolare di un sistema di N particelle

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$

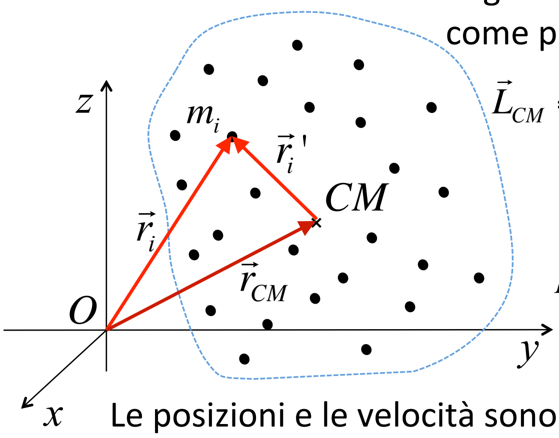
Esempio di come si conserva il momento angolare: **formazione del sistema solare**



Ma anche la formazione delle galassie, o la rotazione rapida delle stelle di neutroni, …

Momento angolare intrinseco

e se calcolassimo il momento angolare prendendo il CM come polo?



$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{L}_i)_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i\,'$$

da confrontare con

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Le posizioni e le velocità sono legate da $\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i\,' \quad ; \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,'$

Momento angolare intrinseco

La relazione tra i due momenti angolari si trova così:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i{}') \times (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}')$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i{}'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}'$$

Momento angolare intrinseco

La relazione tra i due momenti angolari si trova così:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i{}') \times (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}')$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_i{}' + \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}')$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_i{}' + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' \right)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

Momento angolare intrinseco

già visto in precedenza

$$\vec{L}_O = \ldots$$

$$\ldots \qquad M$$

$$\ldots$$

$$\vec{P}\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,' = 0$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,'\right)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,'\right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i\,' \qquad \vec{L}_{CM}$$

0 *già visto in precedenza*

Momento angolare intrinseco

Risultato finale:

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} = \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{P}}\, + \vec{L}_{CM}$$

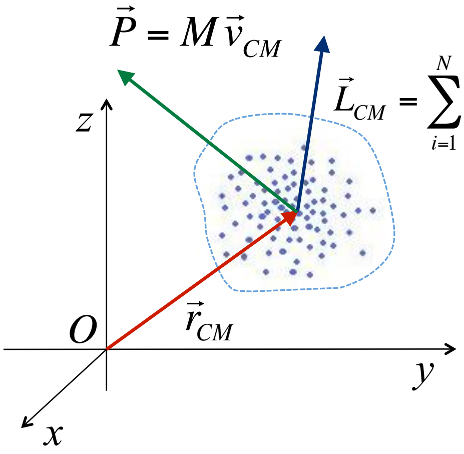
Momento angolare totale rispetto al polo O

Momento angolare, rispetto al polo O, di una particella di massa M posta nel centro di massa del sistema.

*Momento angolare totale rispetto al centro di massa (detto **momento angolare intrinseco**)*

Momento angolare intrinseco

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} + \vec{L}_{CM}}$$

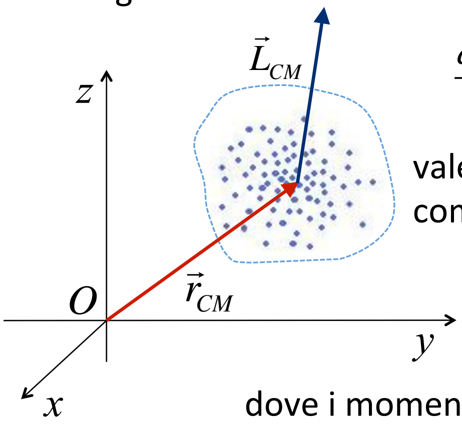


$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i\,'$$

Il momento angolare intrinseco **non** dipende dalla scelta arbitraria del polo O, ma è determinato **solo** dal movimento delle particelle rispetto al comune centro di massa **!!**

Momento angolare intrinseco

Calcoliamo la derivata temporale del momento angolare intrinseco. Basta ricordarsi che la legge



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i)_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}$$

vale per qualsiasi polo. Se usiamo come polo il CM, otteniamo

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{iCM})_{\text{ext}}}$$

dove i momenti delle forze esterne sono calcolati, appunto, rispetto al CM.

Momento angolare intrinseco

Ma il polo non dovrebbe essere un punto fisso in un sistema inerziale per poter applicare la

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}} \quad ??$$

Perché la usiamo anche con polo nel CM

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}}$$

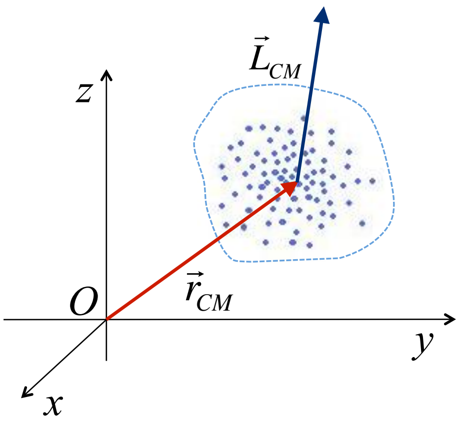
se il CM può avere un'accelerazione non nulla **??**
Lo possiamo fare perchè le forze apparenti nel sistema di riferimento del CM danno un contributo nullo alla somma dei momenti. Infatti...

Momento angolare intrinseco

... infatti, se l'accelerazione del CM è $\vec{a}_{CM}$ allora

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{app}} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}} - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i\,' \times (m_i \vec{a}_{CM}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' \right)}_{0} \times \vec{a}_{CM} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}}\end{aligned}$$

Momento angolare intrinseco



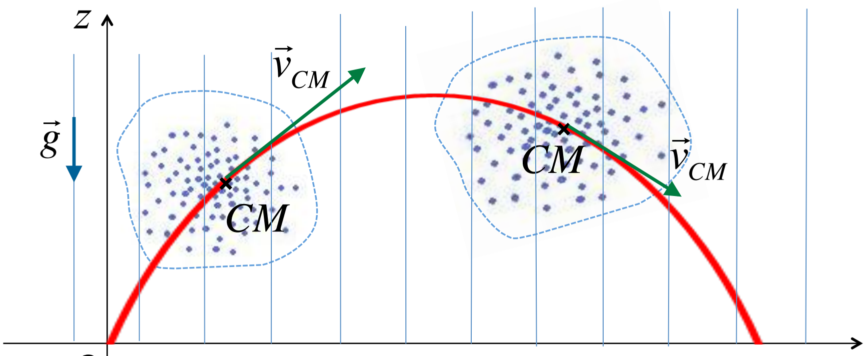
Quindi questa legge

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{i,CM})_{\text{ext}}}$$

vale anche se il sistema di riferimento del CM è accelerato **!!**

N particelle nel campo di gravità uniforme

Esempio: moto di un sistema in un campo di gravità



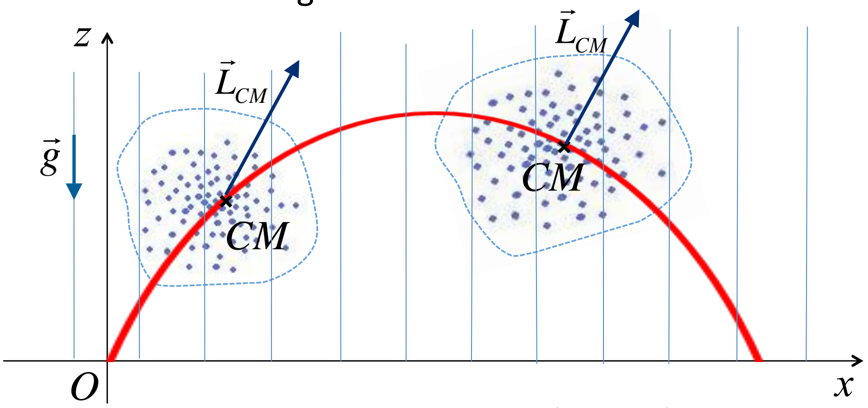
Moto del CM:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{g} = M\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{g}$$

come una sola particella di massa M (moto parabolico).

N particelle nel campo di gravità uniforme

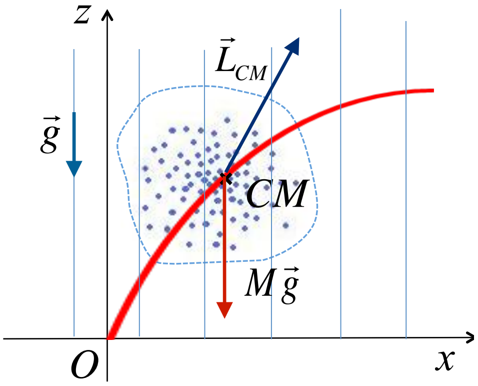
… e il momento angolare intrinseco?



$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{iCM})_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times (m_i \vec{g}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \right) \times \vec{g} = 0$$

Il momento angolare intrinseco si conserva!!

N particelle nel campo di gravità uniforme

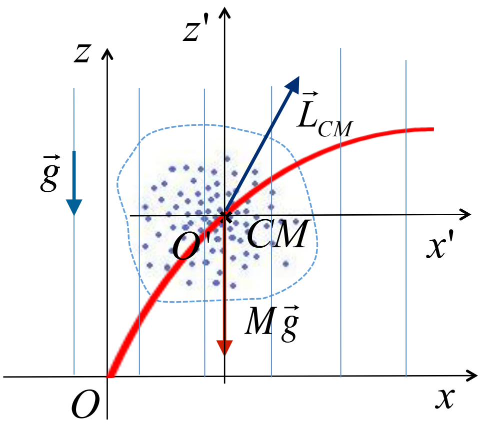


Dal punto di vista del moto globale (del CM) e della rotazione intrinseca (rispetto al CM) tutto va **come se** la forza peso fosse semplicemente $M\vec{g}$, tutta applicata al centro di massa.

N particelle nel campo di gravità uniforme

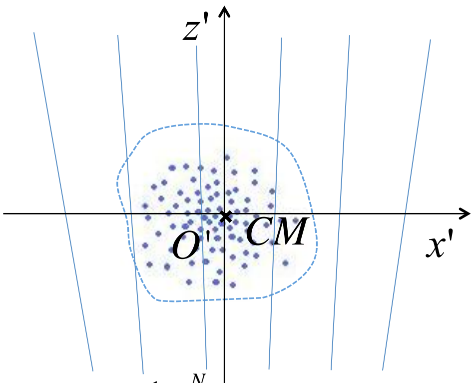
Dal punto di vista del moto globale (del CM) e della rotazione intrinseca (rispetto al CM) tutto va **come se** la forza peso fosse semplicemente $M\vec{g}$, tutta applicata al centro di massa.

N particelle nel campo di gravità uniforme



Se osserviamo il moto delle particelle nel sistema di riferimento del centro di massa, che è accelerato con accelerazione g (è in caduta libera), le particelle sono soggette anche alla forza apparente. Ma la forza apparente si comporta come un campo uniforme che compensa esattamente la forza peso. Il momento delle forze esterne è ancora nullo. Il momento angolare intrinseco si conserva ancora **!!**

N particelle in campo gravitazionale non uniforme



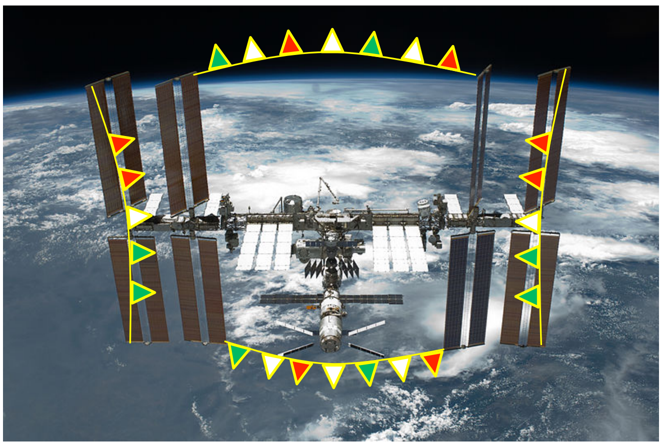
In questo caso la situazione è più complicata. Le forze apparenti non compensano del tutto le forze del campo nemmeno quando il sistema è in caduta libera (la differenza è detta **forza mareale**).

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{\text{ext}} \quad \Rightarrow \quad -(\vec{F}_i)_{\text{app}} = m_i\vec{a}_{CM} \neq (\vec{F}_i)_{\text{ext}}$$

accelerazione del sistema di riferimento

sono uguali solo se $(\vec{F}_i)_{\text{ext}} = m_i\vec{g}$

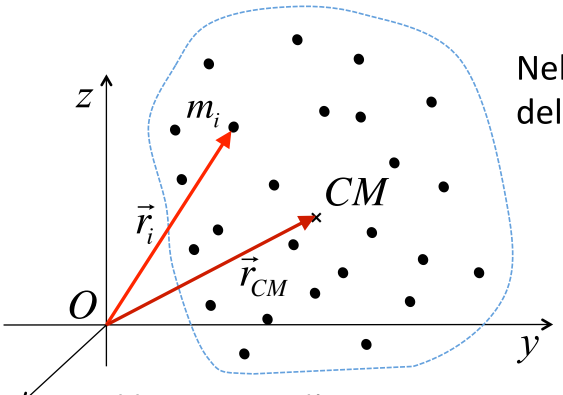
Problema: l'astronauta Samantha Cristoforetti compie gli anni mentre si trova sulla ISS. Per fargli una sorpresa, i suoi colleghi appendono fili di bandierine colorate ai pannelli solari. Le bandierine si dispongono così. Perché **?**



[*risolto questo, si pensi alle maree...*]

Energia cinetica di un sistemi di N particelle

Nel sistema di riferimento *Oxyz*: $E_K = \sum_{i=1}^{N} (E_K)_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$



Nel sistema di riferimento del CM:

$$\boxed{(E_K)_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v'^2_i}$$

Questa è detta **energia cinetica interna.**

Il legame tra l'energia cinetica misurata in un generico sistema di riferimento *Oxyz* e l'energia cinetica interna si trova facilmente...

Energia cinetica di un sistemi di N particelle

... basta usare la legge di composizione delle velocità:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}'$$

velocità rispetto al CM

da cui segue

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \,|\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}'|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v_{CM}^2 + v'^2_i + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i{}')$$

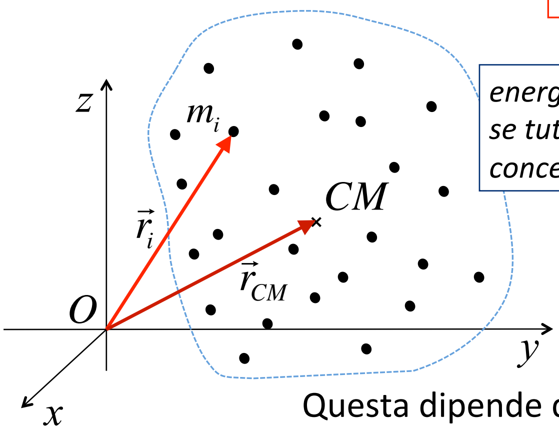
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i{}'$$

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + (E_K)_{\text{int}} + \vec{v}_{CM} \cdot \cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}'}$$

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' = 0$$

Energia cinetica di un sistemi di N particelle

Abbiamo così ottenuto: $$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + (E_K)_{int}$$



energia che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel CM.

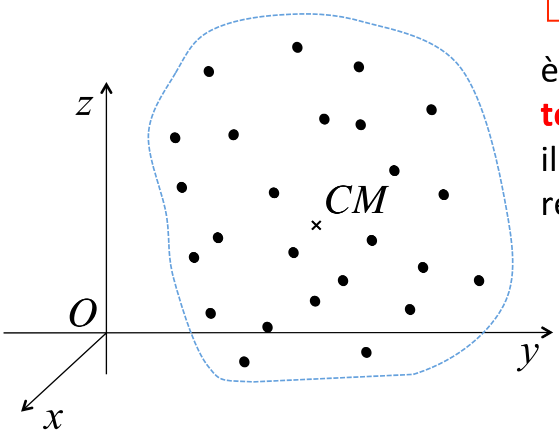
energia cinetica interna al sistema

Questa dipende dalla scelta del sistema di riferimento

...e questa no

Energia cinetica di un sistemi di N particelle

Questo risultato $$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + (E_K)_{int}$$



è anche noto come **teorema di König**, e fa il paio con l'altra relazione analoga:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} + \vec{L}_{CM}$$

Energia, lavoro e teorema delle forze vive

Variazione di energia cinetica tra due istanti generici:

$$\Delta E_K = \sum_{i=1}^{N} (\Delta E_K)_i$$

Per il teorema delle forze vive:

$$(\Delta E_K)_i = W_i$$

Allora

$$\Delta E_K = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} [(W_i)_{\text{int}} + (W_i)_{\text{ext}}]$$

lavoro compiuto dalle forze interne al sistema

lavoro compiuto dalle forze esterne

Energia, lavoro e teorema delle forze vive

Se le forze interne sono conservative allora si può definire un'energia potenziale interna tale che

$$\sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{int}} = -\Delta U_{\text{int}}$$

*questa sarà una **funzione delle distanze relative** tra le particelle del sistema e **non** dipenderà dalla scelta del sistema di riferimento **!!***

Sotto questa ipotesi, la variazione di energia cinetica del sistema diventa

$$\Delta E_K = -\Delta U_{\text{int}} + \sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{ext}}$$

Energia, lavoro e teorema delle forze vive

L'ultima relazione può essere riscritta così:

$$\Delta E_K + \Delta U_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{ext}}$$

ovvero

$$\underbrace{\Delta(E_K + U_{\text{int}})}_{\text{energia propria}} = \sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{ext}}$$

oppure ancora

$$\Delta\left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \underbrace{(E_K)_{\text{int}} + U_{\text{int}}}_{\text{energia interna}}\right) = \sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{ext}}$$

Conservazione dell'energia

Se sul sistema non agiscono forze esterne, il moto del CM è libero e il sistema di riferimento del CM è inerziale. In questo sistema di riferimenti l'energia meccanica coincide con l'energia interna del sistema e vale:

$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta[(E_K)_{\text{int}} + U_{\text{int}}] = 0$$

L'energia interna di un sistema isolato si conserva **!!**

[*nota sull'universo inteso come sistema isolato*]

Sintesi

Per un sistema di N particelle, abbiamo visto che

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \qquad \text{essendo} \qquad \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}}$$

inoltre

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}} \qquad \text{con} \qquad \boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} + \vec{L}_{CM}}$$

Infine, se le forze interne sono conservative:

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + (E_K)_{\text{int}} + U_{\text{int}}\right) = \sum_{i=1}^{N} (W_i)_{\text{ext}}}$$

Sintesi

Le due equazioni

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_{iCM})_{\text{ext}}}$$

rendono conto del moto del sistema nel suo insieme; la prima per la **traslazione del CM**, la seconda per la **rotazione attorno al CM**.

Se si vuole conoscere il moto di ciascuna particella rispetto alle altre, tuttavia, occorre risolvere tutte le N equazioni (vettoriali) del moto, che corrispondono a 3N equazioni (scalari) differenziali accoppiate (la forza su una particella dipende dalle coordinate incognite delle altre particelle).

Se N non è troppo grande, si può fare al computer.

Caso semplice: **corpi rigidi**.