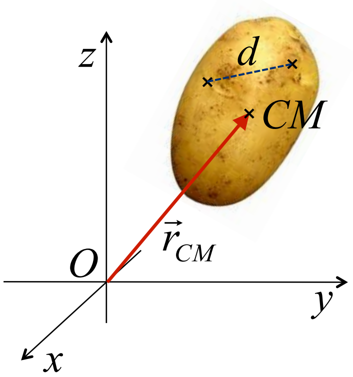
Corpi rigidi (prima parte)

Corpi rigidi

Un corpo rigido è un corpo in cui le **distanze** tra le varie parti che lo compongono rimangono **costanti**.



È un tipo particolare di sistema di N particelle. Valgono ancora le leggi

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}}$$

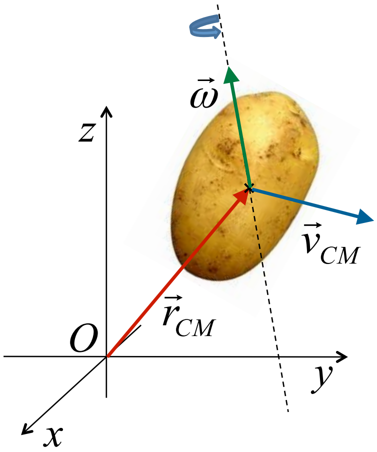
e le relazioni

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} + \vec{L}_{CM}}$$

Corpi rigidi

Un corpo rigido può **traslare** e/o **ruotare**.



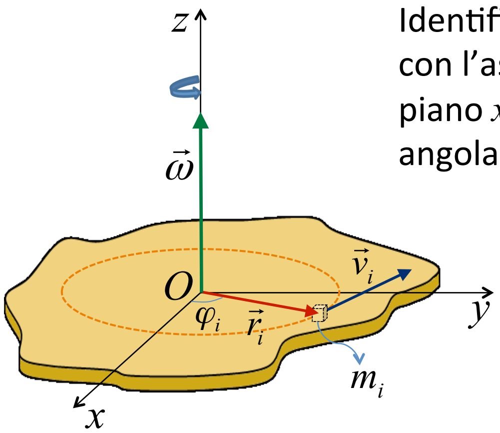
Dato che i gradi di libertà interni sono bloccati, possono bastare le due equazioni del moto

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}}$$

Il problema delle traslazioni è semplice. Concentriamoci invece sulle rotazioni.

[*nota sul numero di gradi di libertà*]

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso



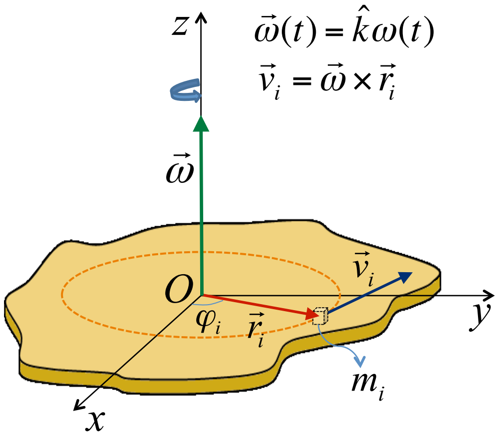
Identifichiamo l'asse di rotazione con l'asse z, e la piastra sia nel piano xy. Allora la velocità angolare è

$$\vec{\omega}(t) = \hat{k}\omega(t)$$

e il moto di ciascuna masserella m_i è circolare con velocità

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso

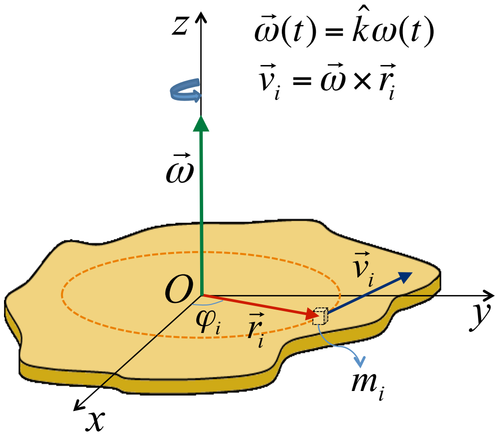


$$\vec{\omega}(t) = \hat{k}\omega(t)$$
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

L'energia cinetica del corpo rigido sarà quindi

$$E_K = \sum_i (E_K)_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \,|\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2$$
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso

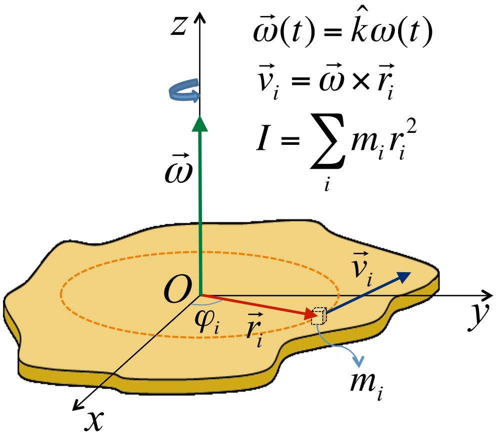


$$\vec{\omega}(t) = \hat{k}\omega(t)$$
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$E_K = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}\omega^2$$

questa quantità dipende **solo** da come sono distribuite le masse nel corpo rigido; **non** dipende dal suo stato di moto. La chiamiamo **momento d'inerzia**: $\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso



$\vec{\omega}(t) = \hat{k}\omega(t)$

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$I = \sum_i m_i r_i^2$

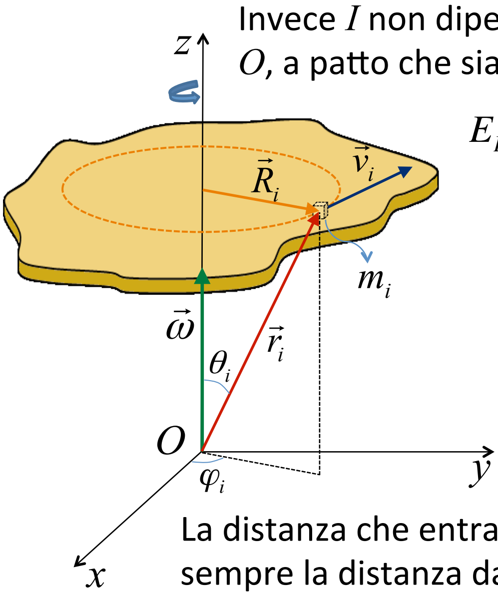
Allora l'energia cinetica diventa

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Notiamo che le r_i nella definizione del momento d'inerzia sono le distanze dall'asse di rotazione. Quindi I dipende dalla scelta dell'asse **!!**

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso

Invece I non dipende dalla scelta dell'origine O, a patto che sia sull'asse. Infatti



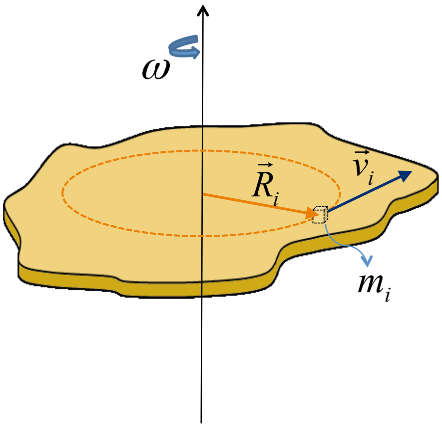
$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \,\mathrm{sen}^2\theta_i$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i R_i^2 \right)}_{I} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

La distanza che entra nella definizione di I è sempre la distanza dall'asse, la stessa di prima !

Corpi rigidi: piastra piana con asse di rotazione fisso



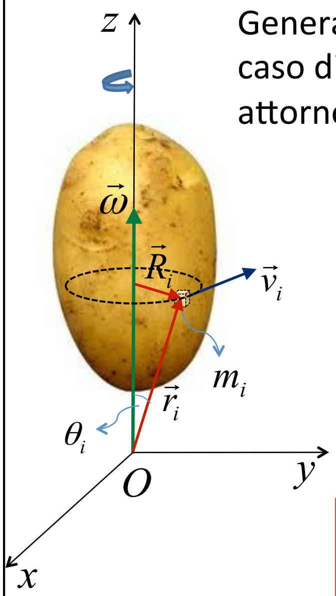
In sintesi, assegnata una piastra piana e un asse di rotazione fisso, perpendicolare ad essa, il momento d'inerzia per rotazioni attorno a tale asse è definito da

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

dove R_i è la **distanza** della massa m_i **dall'asse**

e l'energia cinetica vale $\boxed{E_K = \frac{1}{2} I\omega^2}$

Energia cinetica di un corpo rigido qualsiasi



Generalizzando quanto fatto per la piastra al caso di un corpo rigido qualsiasi che ruota attorno ad un asse fisso, si trova

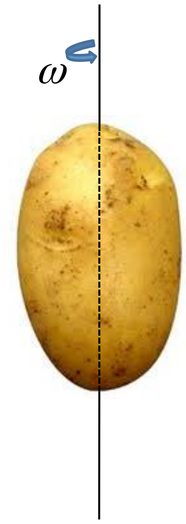
$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \operatorname{sen}^2\theta_i$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i R_i^2 \right)}_{I} \omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I\omega^2}$ come prima **!!**

Energia cinetica di un corpo rigido qualsiasi



Dunque, il momento d'inerzia di un corpo qualsiasi può essere definito come

$$\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2}$$

dove R_i è la distanza di ciascun elemento di massa m_i dall'asse di rotazione. Una volta fissato l'asse, il valore corrispondente di I dipende dalla forma del corpo e da com'è distribuita la massa al suo interno. Ad assi diversi corrispondono I diversi.

Momento d' inerzia di un corpo rigido qualsiasi

$$\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2}$$

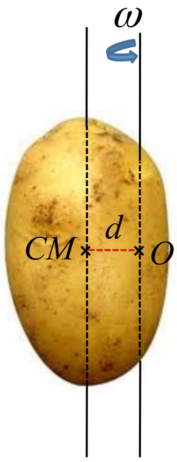
A parità di massa totale

$$M = \sum_i m_i$$

il corpo in cui la massa è mediamente più distante dall'asse ha un momento d'inerzia maggiore **!!**

Esempio: $I_{\text{anello}} > I_{\text{sfera}}$

Momento d'inerzia e teorema di Steiner



$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

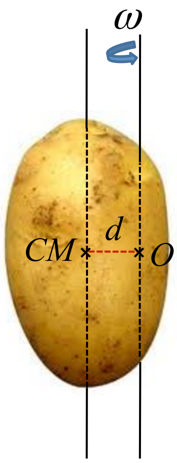
Ricordiamo che ad assi diversi corrispondono I diversi.

Per assi **paralleli** la relazione tra i momenti d'inerzia è semplice.
Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno all'asse passante per O, come in figura, parallelo all'asse passante per il CM.
La sua energia cinetica sarà

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è il momento d'inerzia associato all'asse di rotazione passante per O.

Momento d'inerzia e teorema di Steiner



Per mettere in relazione la rotazione attorno ad O con il moto del CM basta applicare il teorema di König, che vale per un sistema di N particelle qualsiasi

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + (E_K)_{\text{int}}$$

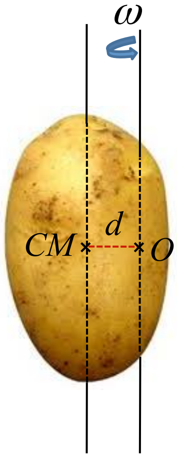
e che, nel nostro caso, può essere scritto come

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + (E_K)_{\text{int}}$$

velocità del CM rispetto ad O:
$v_{CM} = d\omega$

energia cinetica del corpo rispetto al CM

Momento d'inerzia e teorema di Steiner



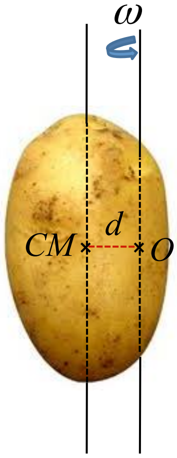
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + (E_K)_{\text{int}}$$

energia cinetica del corpo rispetto al CM

Notiamo che, nel sistema di riferimento avente origine nel CM, tutti i punti del corpo rigido sono visti ruotare con la **stessa velocità angolare** con cui il corpo ruota attorno ad O.

[*si può dimostrare rigorosamente, ma è anche facile convincersi che è vero senza bisogno di dimostrazione formale*].

Momento d'inerzia e teorema di Steiner



$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + (E_K)_{\text{int}}$$

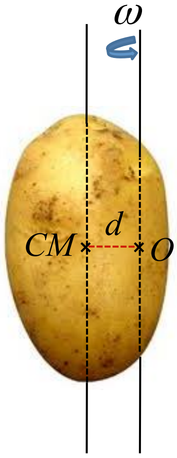
energia cinetica del corpo rispetto al CM

Notiamo che, nel sistema di riferimento avente origine nel CM, tutti i punti del corpo rigido sono visti ruotare con la **stessa velocità angolare** con cui il corpo ruota attorno ad O.

Quindi $$(E_K)_{\text{int}} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

dove I_{CM} è proprio il momento d'inerzia associato all'asse passante per il CM.

Momento d'inerzia e teorema di Steiner



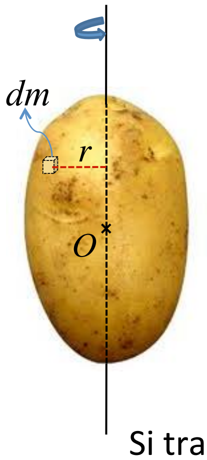
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}(Md^2 + I_{CM})\omega^2$$

ovvero

$$\boxed{I = Md^2 + I_{CM}}$$

Il momento d'inerzia associato ad un asse qualsiasi è uguale a quello associato ad un asse parallelo passante per il CM più il momento d'inerzia di una singola particella puntiforme di massa pari alla massa totale del corpo concentrata nel CM.
Questo è noto come **teorema di Steiner**.

Esempi di calcolo del momento d'inerzia

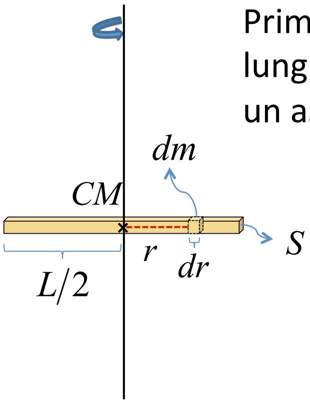


Consideriamo corpi omogenei (**densità di massa** costante, ρ) di forma diversa.
Li suddividiamo in tanti volumetti infinitesimi dV in modo che la massa di ciascuno di essi sia $dm = \rho dV$.
La definizione del momento d'inerzia diventa

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int_{\text{Massa}} r^2\, dm = \int_{\text{Volume}} r^2 \rho\, dV$$

Si tratta di eseguire integrali di volume, in cui l'integrando r^2 (il quadrato della distanza dall'asse) è una funzione delle tre coordinate spaziali.

Esempi di calcolo del momento d'inerzia



Primo esempio: **asta sottile** di massa M, lunghezza L, sezione S; rotazione attorno ad un asse perpendicolare passante per il CM.

$$dV = Sdr$$

$$I_{CM} = \int_{\text{Volume}} r^2 \rho dV = 2\rho \int_0^{L/2} r^2 S dr$$

$$= 2\rho S \int_0^{L/2} r^2\, dr = \frac{\rho S L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

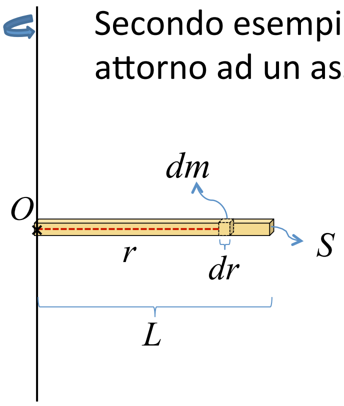
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$$

Risultato:

$$\boxed{I_{CM} = \frac{ML^2}{12}}$$

Esempi di calcolo del momento d'inerzia

Secondo esempio: stessa **asta sottile**, ma rotazione attorno ad un asse passante per un estremo.



$$dV = Sdr$$

$$I = \int_{\text{Volume}} r^2 \rho\, dV = \rho \int_0^{L} r^2 S dr$$

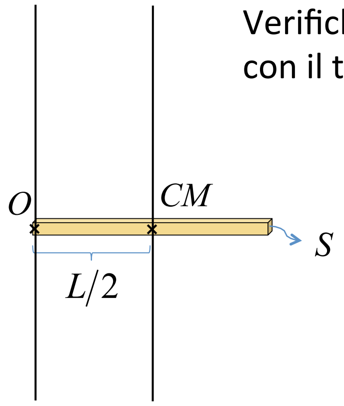
$$= \rho S \int_0^{L} r^2\, dr = \frac{\rho S L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$$

Risultato:

$$\boxed{I = \frac{ML^2}{3}}$$

Esempi di calcolo del momento d'inerzia

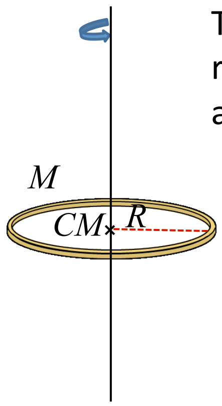


Verifichiamo che il risultato è consistente con il teorema di Steiner

$$I = M(L/2)^2 + (I)_{CM}$$
$$= \frac{ML^2}{4} + \frac{ML^2}{12} = \frac{ML^2}{3}$$

OK

Esempi di calcolo del momento d'inerzia



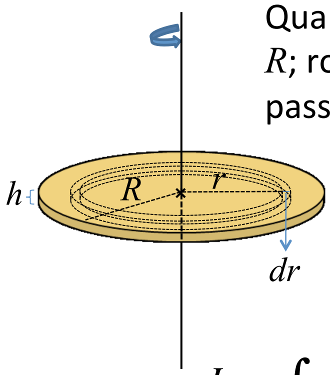
Terzo esempio: **anello sottile** di massa M, raggio R, sezione S; rotazione attorno ad un asse perpendicolare passante per il CM.

$$I = \int_{\text{Massa}} r^2\, dm = R^2 \int_{\text{Massa}} dm = MR^2$$

Risultato:

$$\boxed{I = MR^2}$$

Esempi di calcolo del momento d' inerzia



Quarto esempio: **disco** di massa M e raggio R; rotazione attorno all'asse perpendicolare passante per il centro.

Si può eseguire la somma sulle masse dividendo il disco in tanti anelli infinitesimi concentrici di volume $dV = 2\pi rhdr$; allora:

$$I = \int_{\text{Volume}} r^2 \rho dV = 2\pi h\rho \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi hR^4\rho}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

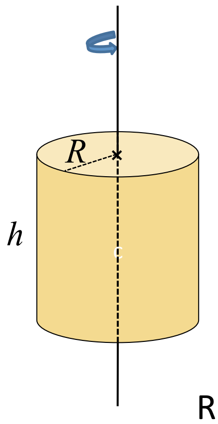
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

Risultato:

$$\boxed{I_{CM} = \frac{MR^2}{2}}$$

indipendente dall'altezza h **!!**

Esempi di calcolo del momento d' inerzia



Quinto esempio: **cilindro** di massa M e raggio R, in rotazione attorno al proprio asse.

Il momento d'inerzia è lo stesso del disco, dato che il risultato di prima non dipendeva dall'altezza h.

Risultato:

$$\boxed{I_{CM} = \frac{MR^2}{2}}$$

Esempi di calcolo del momento d'inerzia

Sesto esempio: **sfera** di massa M e raggio R, in rotazione attorno ad un asse passante per il suo centro.
Possiamo vederla come un insieme di dischi sovrapposti, ciascuno alla quota $-R < z < R$, di spessore dz, raggio $R_d = \sqrt{R^2 - z^2}$ e massa $M_d = \rho\pi R_d^2 dz$. Allora

$$I = \sum_{\text{dischi}} \frac{1}{2} M_d R_d^2 = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2\, dz = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

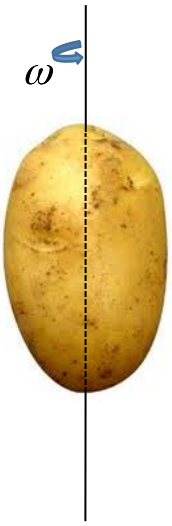
$$= \frac{2}{5} M R^2$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Risultato:

$$\boxed{I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2}$$

Momento angolare di un corpo rigido



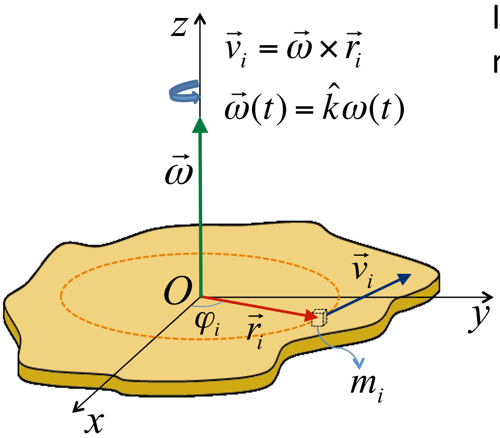
Abbiamo visto che il momento d'inerzia permette di scrivere l'energia cinetica di un corpo rigido in forma semplice:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

Cosa si può dire del momento angolare?

Vediamo prima il caso semplice della piastra piana e sottile.

Momento angolare di un corpo rigido



Il momento angolare rispetto al polo O è

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$= \hat{k} \sum_i m_i r_i v_i = \hat{k} \sum_i m_i r_i^2 \omega$$

$$= \hat{k}\omega \sum_i m_i r_i^2 = \vec{\omega} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{I}$$

Quindi si trova che, per la piastra piana, $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$

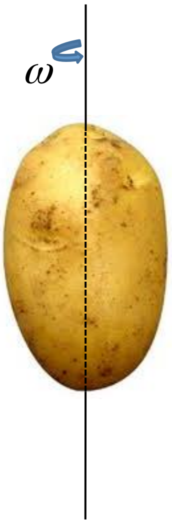
Momento angolare di un corpo rigido

Notiamo un interessante parallelismo:

rotazioni		traslazioni
$\vec{L} = I\vec{\omega}$	⟺	$\vec{p} = m\vec{v}$
$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2$		$E_K = \frac{1}{2} m v^2$

Il **momento d'inerzia** esprime quantitativamente il concetto di inerzia per rotazioni, così come la **massa** esprime l'inerzia per traslazioni **!**

Momento angolare di un corpo rigido



La relazione

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

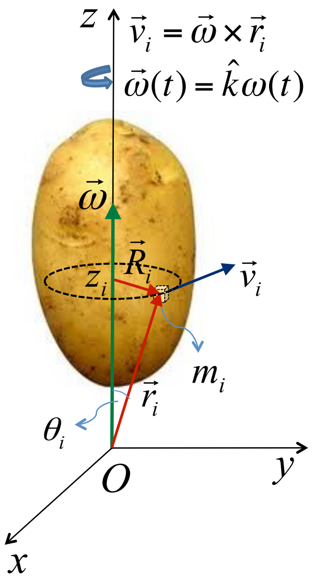
è valida anche per corpi di forma qualsiasi **?**

In generale **NO**.

È valida nel caso particolare di rotazione attorno ad **assi principali d'inerzia**.

Vediamo come.

Momento angolare di un corpo rigido



Calcoliamo il momento angolare per un corpo generico:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

notiamo che i prodotto vettoriali, al contrario del caso della piastra piana, non sono più tutti orientati lungo l'asse z. Però vale ancora

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

e possiamo sfruttare le proprietà dei prodotti vettoriali. In particolare...

Momento angolare di un corpo rigido

...in particolare, si può dimostrare che per tre vettori qualsiasi vale la seguente relazione

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

[*dimostrazione alla lavagna*]

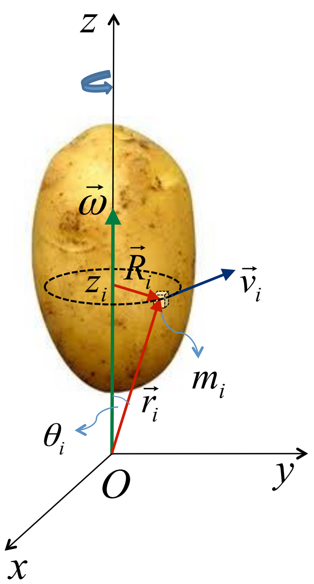
Nel nostro caso $\vec{A} = \vec{r}_i\,;\quad \vec{B} = \vec{\omega}\,;\quad \vec{C} = \vec{r}_i\,.$

Dunque:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \sum_i m_i[\vec{\omega}(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})]$$

$$= \sum_i m_i[r_i^2\vec{\omega} - z_i\omega\vec{r}_i]$$

Momento angolare di un corpo rigido



Dunque

$$\vec{L} = \sum_i m_i[r_i^2\vec{\omega} - z_i\omega\vec{r}_i]$$

ma notiamo che

$$\vec{r}_i = \hat{k}z_i + \vec{R}_i$$

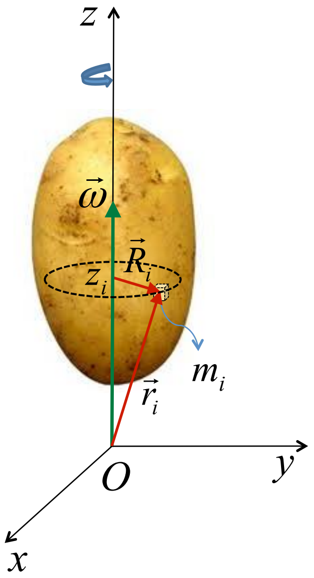
e quindi

$$\vec{L} = \sum_i m_i[r_i^2\vec{\omega} - z_i^2\omega\hat{k} - z_i\omega\vec{R}_i]$$

$$= \sum_i m_i[(r_i^2 - z_i^2)\omega\hat{k} - z_i\omega\vec{R}_i]$$

$$= \sum_i m_i[R_i^2\omega\hat{k} - z_i\omega\vec{R}_i]$$

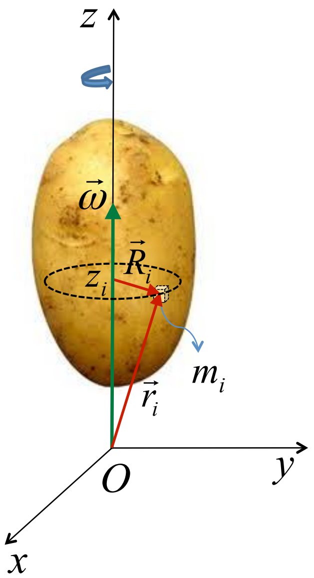
Momento angolare di un corpo rigido



e il risultato finale è

$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega\hat{k} - \left(\sum_i m_i z_i \vec{R}_i\right)\omega$$

Momento angolare di un corpo rigido



e il risultato finale è

$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega\hat{k} - \left(\sum_i m_i z_i \vec{R}_i\right)\omega$$

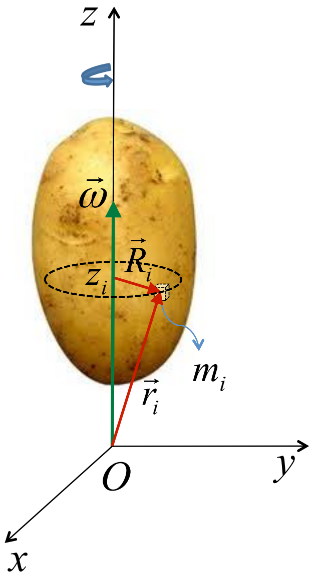
questo è un vettore diretto lungo l'asse di rotazione. La componente lungo l'asse può essere scritta così: $\boxed{L_z = I\omega}$

dove

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

è il momento d'inerzia.

Momento angolare di un corpo rigido

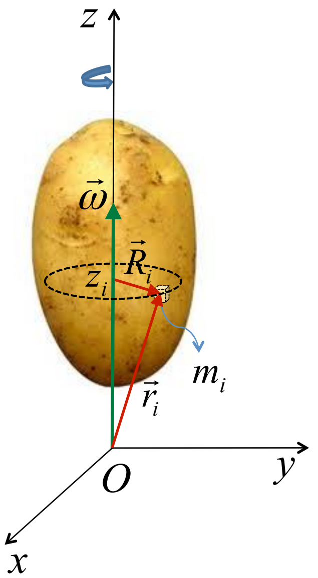


e il risultato finale è

$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega \hat{k} - \underbrace{\left(\sum_i m_i z_i \vec{R}_i \right)} \omega$$

questo è un vettore perpendicolare all'asse di rotazione.

Momento angolare di un corpo rigido



$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega \hat{k} - \left(\sum_i m_i z_i \vec{R}_i \right) \omega$$

Quindi il momento angolare, in generale, **non è parallelo** al vettore velocità angolare **!!**

$$\boxed{\vec{L} \neq I \vec{\omega}}$$

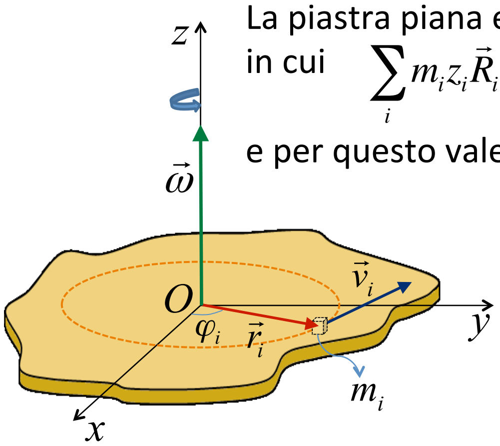
Affinché si possa ancora scrivere

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

la condizione necessaria è

$$\sum_i m_i z_i \vec{R}_i = 0$$

Momento angolare di un corpo rigido

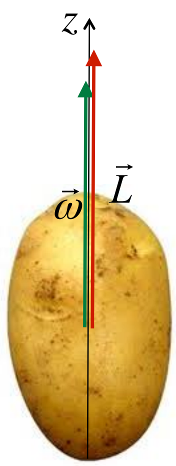


La piastra piana era uno dei casi particolari in cui $\sum_i m_i z_i \vec{R}_i = 0$

e per questo valeva la relazione $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Per un corpo generico, gli assi di rotazioni per i quali vale la $\vec{L} = I\vec{\omega}$ vengono detti, per definizione, **assi principali d'inerzia**. Ogni corpo ammette almeno tre assi principali d'inerzia passanti per il CM.

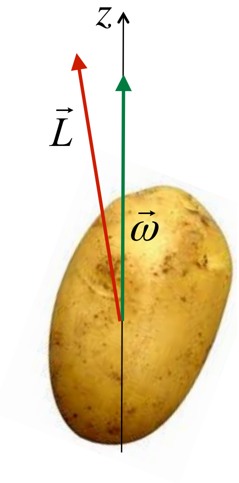
Momento angolare di un corpo rigido



Per un corpo generico, gli assi di rotazioni per i quali il momento angolare $\vec{L}$ è parallelo alla velocità angolare $\vec{\omega}$ vengono detti, per definizione, **assi principali d'inerzia**. Ogni corpo ammette almeno tre assi principali d'inerzia passanti per il CM. Gli assi di simmetria geometrica dei corpi rigidi omogenei sono assi principali d'inerzia.

[*per approfondimenti si veda Knudsen-Hjorth, capitolo 13*]
[*esempio del bilanciere a due masse (alla lavagna)*]

Momento angolare di un corpo rigido



In ogni caso, anche se la rotazione **non** avviene attorno ad un asse principale d'inerzia, la **componente** del momento angolare $\vec{L}$ lungo l'asse di rotazione è **sempre** scrivibile come

$$\boxed{L_z = I\omega}$$

dove I è il momento d'inerzia associato a quell'asse.

Equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso

Prendiamo un corpo rigido che sia in rotazione attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale. Identifichiamo tale asse con l'asse z e calcoliamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt}$$

dove $\vec{L}$ è riferito ad un polo O scelto lungo l'asse.
Usiamo la legge

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}}$$

valida per un sistema di particelle qualsiasi...

Equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso

... e ne prendiamo la componente z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\tau_{i,z})_{\text{ext}} \equiv \tau_z$$

Ora ricordiamo che nella rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse qualsiasi vale $L_z = I\omega$
e dunque

$$\boxed{I\frac{d\omega}{dt} = \tau_z}$$

Questa è l'equazione del moto **!!**
Ci basta un'equazione, perché c'è un solo grado di libertà e una sola coordinata (l'angolo attorno all'asse).

Equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso

Possiamo completare il parallelismo:

rotazioni	⟺	traslazioni
$L_z = I\omega$		$\vec{p} = m\vec{v}$
$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$		$E_K = \frac{1}{2}mv^2$
$I\frac{d\omega}{dt} = \tau_z$		$m\frac{dv}{dt} = F$

Equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso

Possiamo riscrivere l'equazione del moto

$$\boxed{I\frac{d\omega}{dt}=\tau_z}$$

usando la definizione di accelerazione angolare

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

L'equazione diventa

$$\boxed{I\alpha=\tau_z}$$

Nel caso particolare $\tau_z=0$ si ottiene $\omega=\text{costante}$.

Equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso

L'equazione del moto

$$\boxed{I\frac{d\omega}{dt}=\tau_z}$$

può essere scritta in forma vettoriale

$$\boxed{I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\tau}}$$

solo se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia **!!**