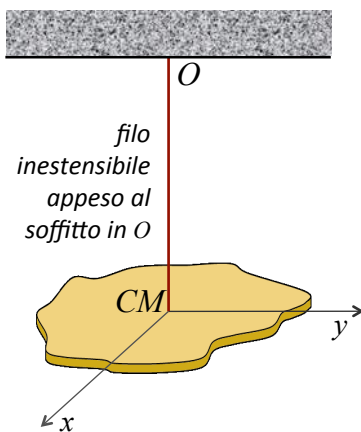


Corpi rigidi (seconda parte)

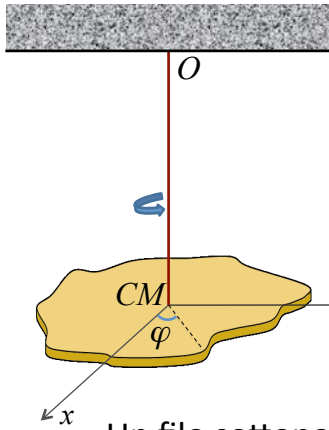


Applicazione #1: pendolo di torsione



Se il filo è agganciato nel CM del corpo rigido, ed è nella posizione verticale, le forze esterne agenti sul corpo appeso (forza peso e tensione del filo) hanno momento nullo rispetto al punto O . Infatti la tensione è applicata nel CM ed è parallela al filo e la forza peso può essere vista anch'essa applicata al CM, di modulo Mg e parallela al filo (già visto nel caso generale dei sistemi di N particelle in un campo di gravità uniforme)...

Applicazione #1: pendolo di torsione

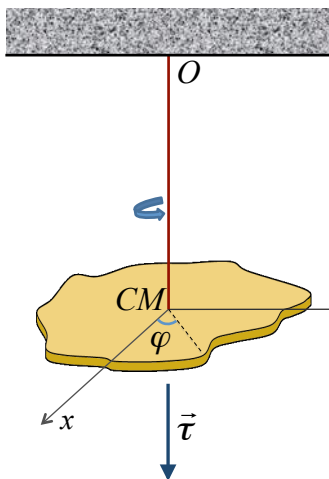


... inoltre forza peso e tensione del filo sono uguali i modulo e opposte, così che il CM si trova all'equilibrio e non si muove, se non è mosso all'inizio.

Invece il corpo libero può ruotare attorno all'asse verticale. In tal caso il filo si torce.

Un filo sottoposto a torsione reagisce producendo un momento delle forze τ che si oppone alla torsione, proporzionale all'angolo (misurato a partire dall'angolo di equilibrio)...

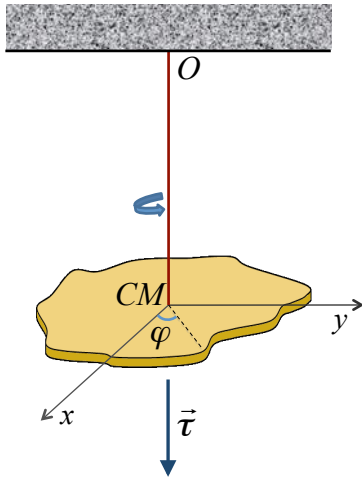
Applicazione #1: pendolo di torsione



... Il momento delle forze agente sul corpo appeso dovuto alla torsione del filo è $\vec{\tau} = -C\varphi \hat{k}$

La costante C è detta **coefficiente di torsione** ed è una proprietà del filo (dipende dalla sezione, dalla lunghezza, dal materiale di cui è fatto, ecc.). Si determina in modo empirico, analogamente a quanto si fa per la costante elastica di una molla.

Applicazione #1: pendolo di torsione



Dunque

$$\vec{\tau} = -C\varphi \hat{k}$$

che scritto per la componente z
diventa

$$\tau_z = -C\varphi$$

E così possiamo scrivere
l'equazione del moto

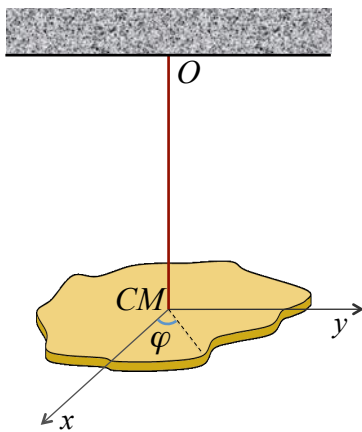
$$I\alpha = \tau_z$$

ovvero

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -C\varphi$$

È un'equazione armonica.

Applicazione #1: pendolo di torsione



Equazione del moto del pendolo
di torsione:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I}\varphi = 0$$

Ha soluzione $\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\Omega t + \vartheta)$

con $\Omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$

e periodo di oscillazione

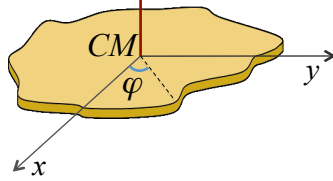
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$$

Applicazione #1: pendolo di torsione



Oscillazione con periodo

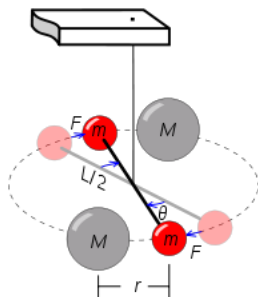
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$



Dato che il coefficiente di torsione può essere anche molto piccolo e il momento d'inerzia può essere reso grande, allora si possono ottenere oscillazioni con periodo molto lungo.

I pendoli di torsione sono sensibili a piccole forze !!

Applicazione #1: pendolo di torsione



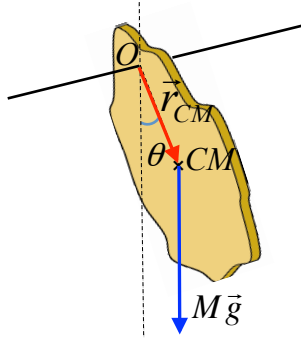
Oscillazione con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

Dato che il coefficiente di torsione può essere anche molto piccolo e il momento d'inerzia può essere reso grande, allora si possono ottenere oscillazioni con periodo molto lungo.

I pendoli di torsione sono sensibili a piccole forze !!
(esempio: bilancia di Cavendish)

Applicazione #2: pendolo fisico

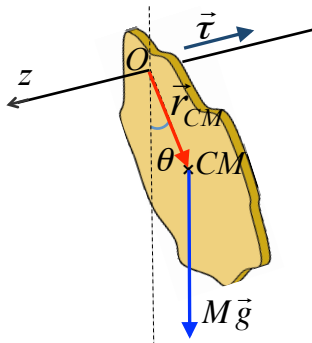


L'asse è orizzontale e passa per il punto O del corpo rigido, diverso dal CM. La reazione vincolare in O non dà momento rispetto a quel punto. L'unica forza che dà momento è la forza peso. Sommando i momenti della forza peso agente su ciascun elemento di massa del corpo si ottiene

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\tau}_i)_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{g}$$

come se tutta la massa fosse nel CM (lo sapevamo già).

Applicazione #2: pendolo fisico



Quindi $\vec{\tau} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{g}$

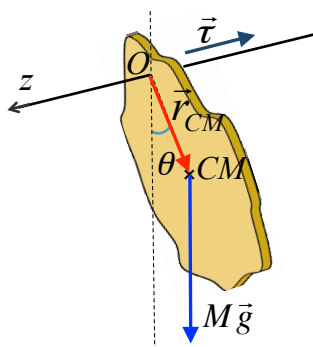
Questo vettore è parallelo all'asse di rotazione, che possiamo identificare con l'asse z , e la sua componente z è

$$\tau_z = -Mg r_{CM} \sin \theta$$

dove il segno meno è stato inserito per rendere conto del fatto che la

la forza peso agisce con un momento "di richiamo": ad angoli positivi deve corrispondere un'accelerazione angolare negativa, tendente a riportare il pendolo verso la posizione verticale di equilibrio.

Applicazione #2: pendolo fisico



L'equazione del moto $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_z$

diventa $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg r_{CM} \sin\theta$

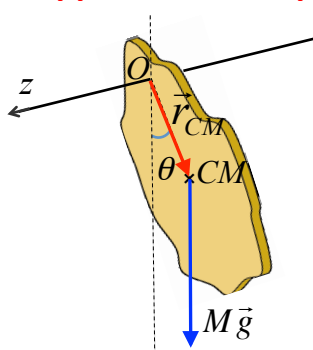
ovvero

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mg r_{CM}}{I} \sin\theta = 0$$

Assomiglia a quella di un pendolo semplice, con massa puntiforme M appesa ad una distanza l dal punto O . In quel caso si aveva

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

Applicazione #2: pendolo fisico



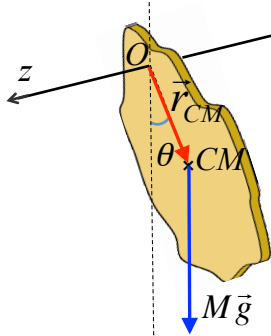
Come nel caso del pendolo semplice, anche qui possiamo considerare il limite di piccole oscillazioni. Se l'angolo è piccolo, allora $\sin\theta \approx \theta$ e possiamo riscrivere l'equazione in forma di equazione armonica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \theta = 0$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mg r_{CM}}{I}}$$

Applicazione #2: pendolo fisico



L'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$

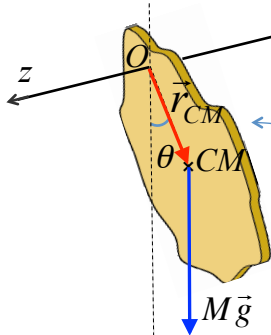
ha soluzione generale

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\Omega t + \varphi)$$

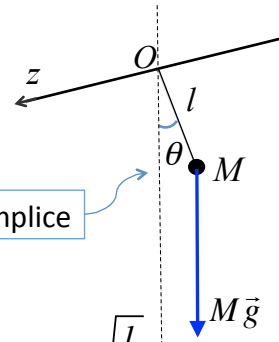
che corrisponde ad oscillazioni armoniche con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg r_{CM}}}$$

Applicazione #2: pendolo fisico



pendolo fisico



pendolo semplice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg r_{CM}}}$$

si ottiene come caso particolare

$$T_{ps} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$I \rightarrow Ml^2$$

$$r_{CM} \rightarrow l$$

Applicazione #2: pendolo fisico

Esempio:

asta sottile di lunghezza D

$$I = \frac{MD^2}{3}$$

pendolo semplice di lunghezza l

$$T_{\text{asta}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg r_{CM}}}$$

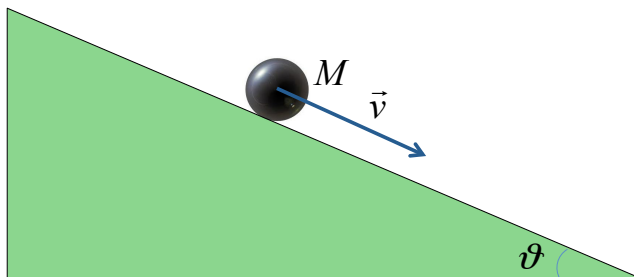
$$= 2\pi \sqrt{\frac{D^2}{3g(D/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2D}{3g}}$$

$$T_{\text{ps}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{T_{\text{asta}}}{T_{\text{ps}}} = \sqrt{\frac{2D}{3l}}$$

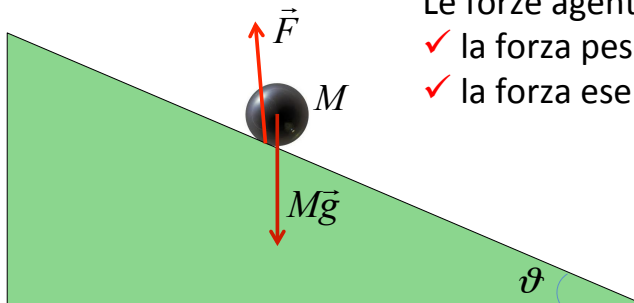
[misura in aula]

Applicazione #3: rotolamento



Consideriamo un corpo rigido omogeneo, come una sfera o un cilindro, con profilo circolare di raggio R , che rotola lungo un piano inclinato, in condizioni di rotolamento puro (punto di contatto istantaneamente fermo).

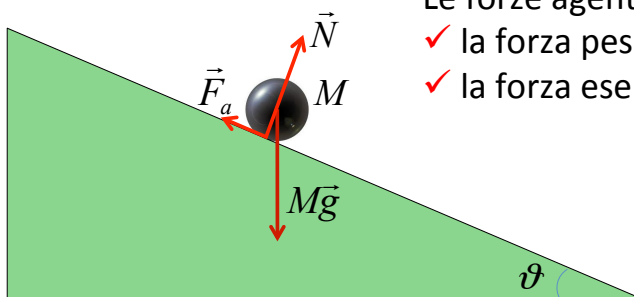
Applicazione #3: rotolamento



- Le forze agenti sul corpo:
- ✓ la forza peso
 - ✓ la forza esercitata dal piano

Sappiamo già che l'effetto del peso sul corpo può essere rappresentato da una singola forza $M\vec{g}$ applicata al CM. La forza esercitata dal piano, invece, è applicata al punto di contatto.

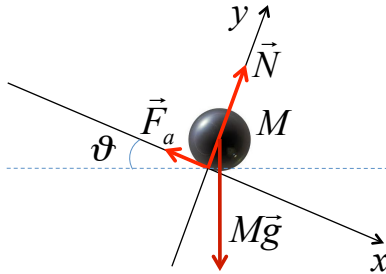
Applicazione #3: rotolamento



- Le forze agenti sul corpo:
- ✓ la forza peso
 - ✓ la forza esercitata dal piano

Inoltre, la forza esercitata dal piano può essere scomposta in due componenti, una perpendicolare al piano stesso (reazione vincolare) e una parallela.

Applicazione #3: rotolamento



Traslazione:

è un moto unidimensionale in una direzione assegnata.

L'equazione del moto del CM è:

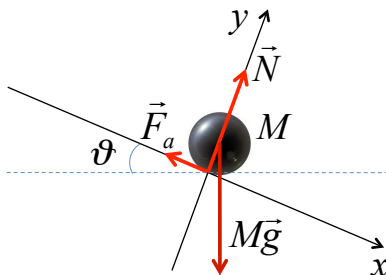
$$M\vec{a}_{CM} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a$$

Lungo x: $M a_{CM} = Mg \sin \vartheta - F_a$

Lungo y: $0 = -Mg \cos \vartheta + N \quad \Rightarrow \quad N = Mg \cos \vartheta$

Se la forza esercitata dal piano è dovuta solo ad attriti, allora la condizione affinché il corpo rotoli senza scivolare è $F_a \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos \vartheta$

Applicazione #3: rotolamento



Rotazione:

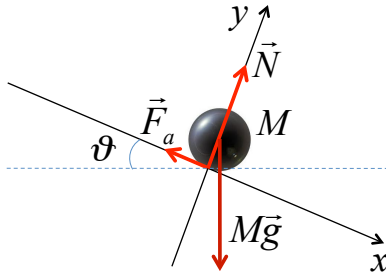
conviene considerare la rotazione attorno all'asse passante per il CM e perpendicolare al piano xy .

L'equazione del moto per il momento angolare intrinseco è

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = \tau$$

Ricordiamo che questa vale anche se il CM accelera, come in questo caso. Usando il momento d'inerzia possiamo scrivere $L_{CM} = I\omega$ e quindi $I\alpha = \tau \dots$

Applicazione #3: rotolamento



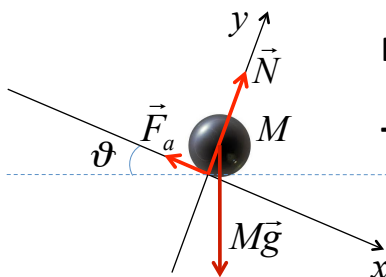
... e dobbiamo risolvere la

$$I\alpha = \tau$$

dove il momento delle forze va calcolato rispetto al CM. Per ogni forza dobbiamo calcolare il prodotto $\vec{r} \times \vec{F}$, dove \vec{r} è la

posizione del punto di applicazione della forza rispetto al CM. La forza peso ha momento nullo perché applicata nel CM; la reazione vincolare ha momento nullo perché la sua retta d'azione passa per il CM. L'unica forza che contribuisce è la forza d'attrito, il cui momento è un vettore perpendicolare al piano xy e di modulo RF_a .

Applicazione #3: rotolamento



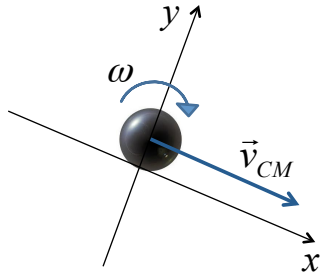
Rotazione: $I\alpha = RF_a$

Traslazione: $Ma_{CM} = Mg \sin \vartheta - F_a$

sono 2 equazioni per le 3 incognite a_{CM} , α , F_a .

La terza equazione viene dalla condizione di rotolamento puro: affinché il punto di contatto tra il corpo e il piano sia istantaneamente fermo, occorre che la velocità con cui i punti della superficie del corpo ruotano attorno al CM sia uguale alla velocità relativa del CM rispetto alla superficie del piano di appoggio [si pensi all'esercizio del cicloide].

Applicazione #3: rotolamento



Rotazione: $I\alpha = RF_a$

Traslazione: $Ma_{CM} = Mg \sin \vartheta - F_a$

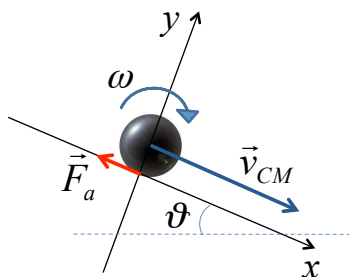
Condizione di rotolamento:

$$v_{CM} = R\omega \quad \rightarrow \quad a_{CM} = R\alpha$$

Ora abbiamo 3 equazioni e 3 incognite. Il sistema si risolve facilmente [alla lavagna] e il risultato è

$$a_{CM} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + (I / MR^2)} \quad ; \quad \alpha = \frac{a_{CM}}{R} \quad ; \quad F_a = \frac{(I / R^2) g \sin \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

Applicazione #3: rotolamento



$$a_{CM} = \frac{g \sin \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

$$F_a = \frac{(I / R^2) g \sin \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

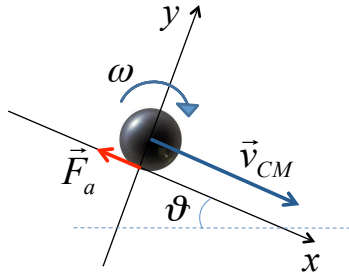
Esempio: **sfera** di massa M e raggio R

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad \rightarrow \quad a_{CM} = \frac{5}{7} g \sin \vartheta$$

è più piccola di quella che si avrebbe senza rotolamento, $g \sin \vartheta$.

$$F_a = \frac{2}{7} Mg \sin \vartheta$$

Applicazione #3: rotolamento



$$a_{CM} = \frac{g \operatorname{sen} \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

$$F_a = \frac{(I / R^2) g \operatorname{sen} \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

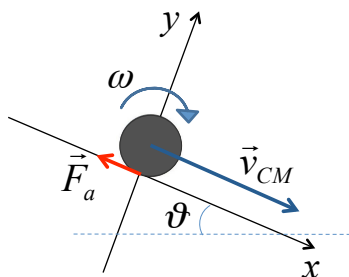
Esempio: **sfera** di massa M e raggio R

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \vartheta$$

$$F_a = \frac{2}{7} Mg \operatorname{sen} \vartheta$$

la condizione per non scivolare è
 $F_a \leq \mu_s Mg \cos \vartheta$
 ovvero
 $\operatorname{tg} \vartheta \leq (7/2) \mu_s$

Applicazione #3: rotolamento



$$a_{CM} = \frac{g \operatorname{sen} \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

$$F_a = \frac{(I / R^2) g \operatorname{sen} \vartheta}{1 + (I / MR^2)}$$

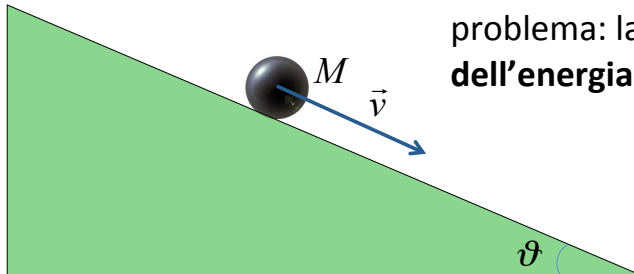
Altro esempio: **cilindro** di massa M e raggio R

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \vartheta$$

$$F_a = \frac{1}{3} Mg \operatorname{sen} \vartheta$$

è più piccola di quella della sfera a parità di massa e raggio, perché l'inerzia alla rotazione è maggiore.

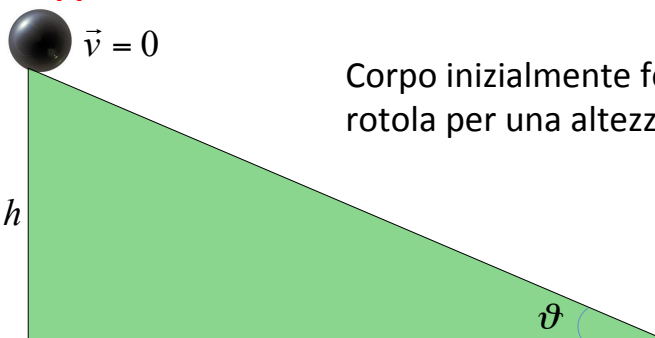
Applicazione #3: rotolamento



Un'altro modo di vedere il problema: la **conservazione dell'energia meccanica!**

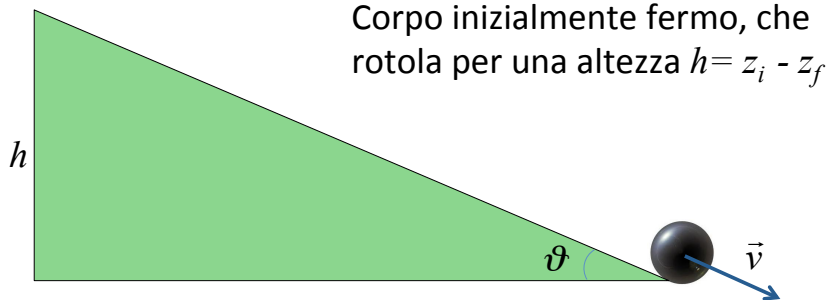
L'energia meccanica si conserva perché il peso è una forza conservativa, la reazione vincolare è perpendicolare allo spostamento e la forza di attrito statico è applicata ad un punto istantaneamente fermo, e dunque non lavora.

Applicazione #3: rotolamento



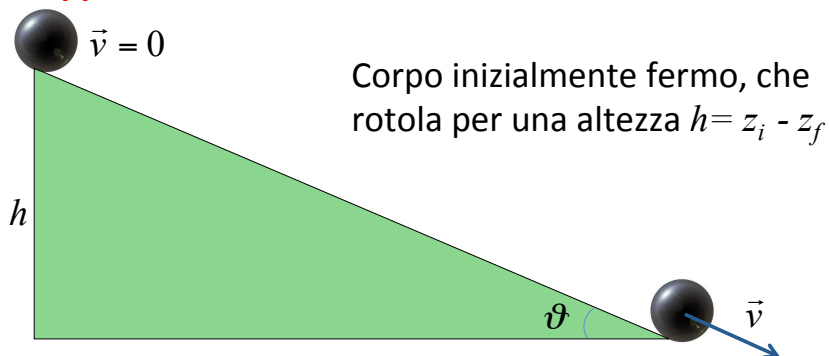
Corpo inizialmente fermo, che rotola per una altezza $h = z_i - z_f$

$$E_{\text{iniziale}} = Mgz_i$$

Applicazione #3: rotolamento

$$E_{\text{iniziale}} = Mgz_i$$

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} + Mgz_f$$

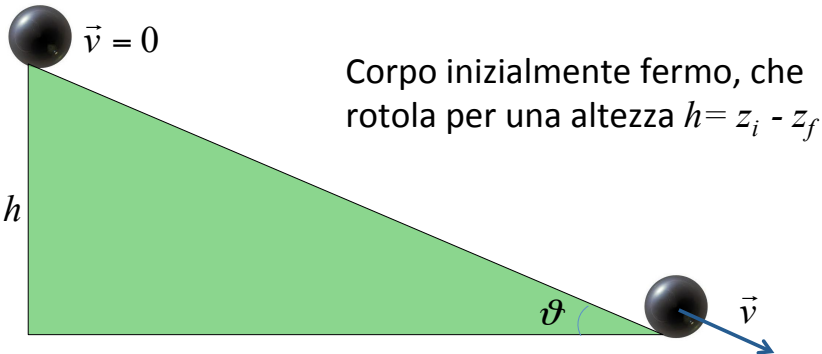
Applicazione #3: rotolamento

$$E_{\text{iniziale}} = Mgz_i$$

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} + Mgz_f$$

ma l'energia si conserva: $E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}}$

Applicazione #3: rotolamento

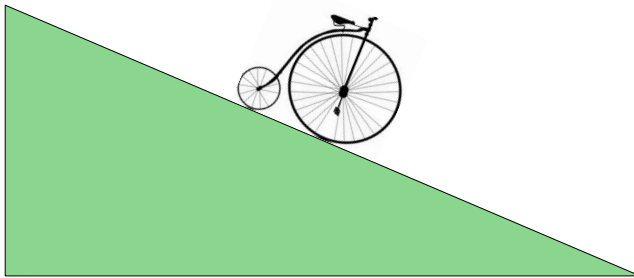


La conservazione dell'energia dà

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = Mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh / \left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

e la velocità finale è minore di quella che si avrebbe nella sola traslazione, $v = \sqrt{2gh}$.

Applicazione #3: rotolamento



L'energia potenziale iniziale viene convertita in parte in energia cinetica di traslazione e in parte in energia cinetica di rotazione !!

A parità di massa totale, la velocità finale è più piccola se il momento d'inerzia è più grande !

Applicazione #3: rotolamento

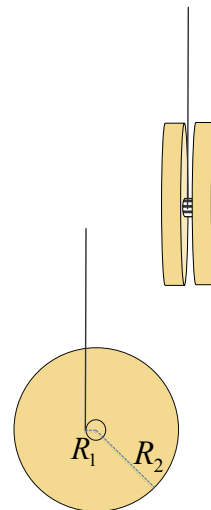
Commenti:

Il contatto con il piano può produrre, oltre all'attrito statico, una forza di attrito **dissipativa** anche in condizioni di puro rotolamento. Si chiama forza di **attrito volvente**. Qui l'abbiamo trascurata.

Abbiamo visto che, se il rotolamento è indotto dal solo attrito statico, allora l'angolo di inclinazione non deve essere troppo grande, oppure il coefficiente di attrito non deve essere troppo piccolo ($F_a \leq \mu_s N$). Altrimenti il corpo scivola. Si può evitare questo limite aggiungendo vincoli diversi (fune che si srotola, cremagliera, ...)

Applicazione #3: rotolamento

Esempio interessante: yo-yo



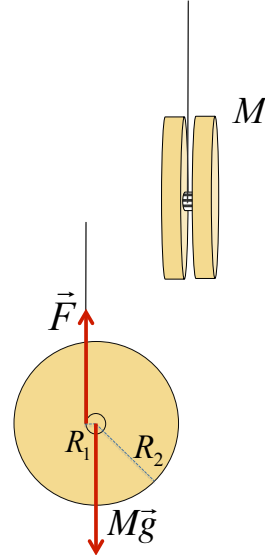
Applicazione #3: rotolamento

Esempio interessante: yo-yo

Trascuriamo il momento d'inerzia del cilindretto interno e la massa del filo. Allora, il momento d'inerzia dello yo-yo rispetto al suo CM è

$$I = \frac{MR_2^2}{2}$$

Le equazioni del moto per la traslazione sono le stesse che nel rotolamento sul piano inclinato, con $\vartheta = \pi/2$ e con la tensione del filo al posto della forza di attrito statico.



Applicazione #3: rotolamento

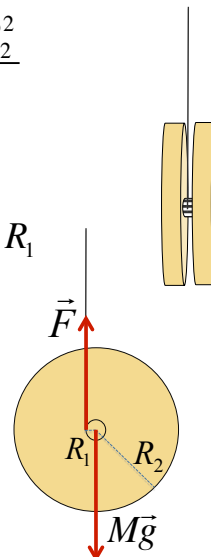
Rotazione: $I\alpha = R_1F$ con $I = \frac{MR_2^2}{2}$

Traslazione: $Ma = Mg - F$

Condizione di rotolamento: $\alpha = a / R_1$



$$a = \frac{g}{1 + (I / MR_1^2)} = \frac{g}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}$$



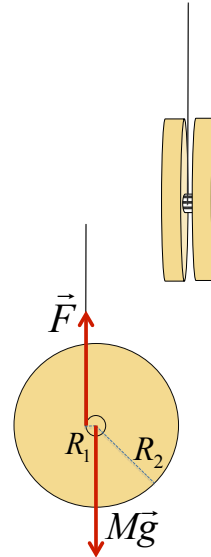
Applicazione #3: rotolamento

$$a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}$$

non dipende dalla massa dello yo-yo!

È molto piccola se $R_2 \gg R_1$.

Vale $(2/3)g$ se $R_2 = R_1$.



Applicazione #3: rotolamento

Quesito:

Perché lo yo-yo torna su?

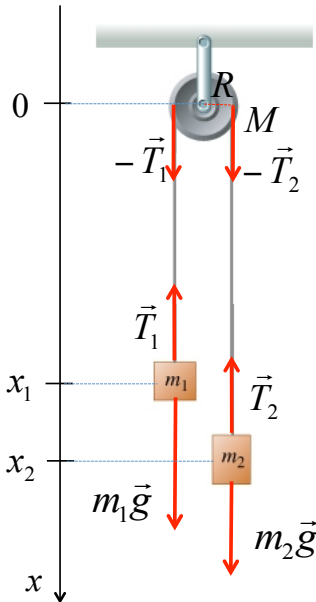


A fine corsa il filo esercita una forza breve e intensa (impulsiva), comportandosi come un vincolo rigido.

La quantità di moto **non** si conserva. L'energia cinetica **può** conservarsi, ma **non** necessariamente.

Il momento angolare si conserva !!
(perché?)

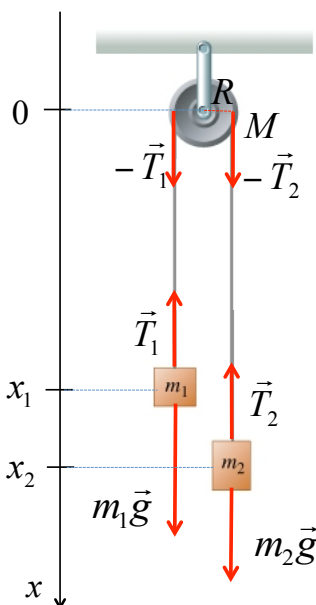
Applicazione #4: la macchina di Atwood (rivista)



Prendiamo la solita macchina di Atwood, ma stavolta consideriamo anche la **massa della carrucola**. La trattiamo come un cilindro di raggio R che rotola rispetto alla fune, ma non trasla.

Le equazioni del moto diventano tre: due per la traslazione delle masse appese e la terza per la rotazione della carrucola.

Applicazione #4: la macchina di Atwood (rivista)



$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\ I \alpha = R(T_1 - T_2) \end{cases}$$

La lunghezza costante del filo impone:

$$a = a_1 = -a_2$$

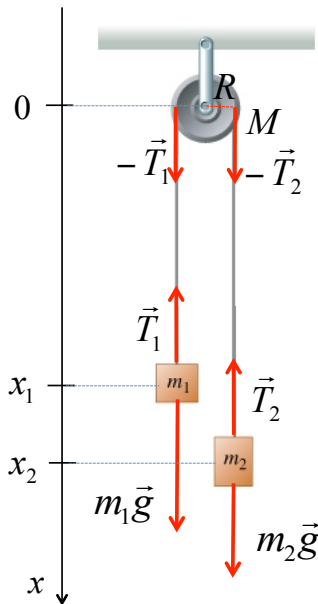
La condizione di rotolamento della carrucola impone:

$$\alpha = a / R$$

Il momento d'inerzia è:

$$I = (1/2)MR^2$$

Applicazione #4: la macchina di Atwood (rivista)



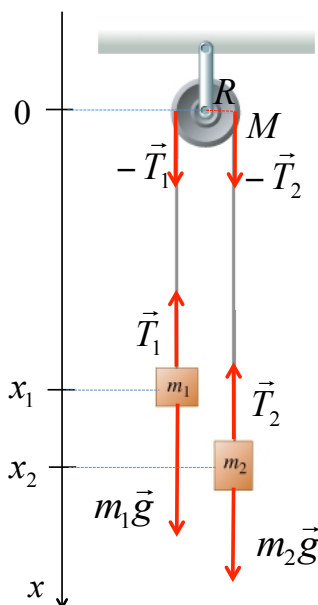
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = -m_2 g + T_2 \\ (M/2)a = T_1 - T_2 \end{cases}$$

La soluzione è:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (M/2)} g$$

Si ritrova la soluzione della macchina ideale quando $M=0$.

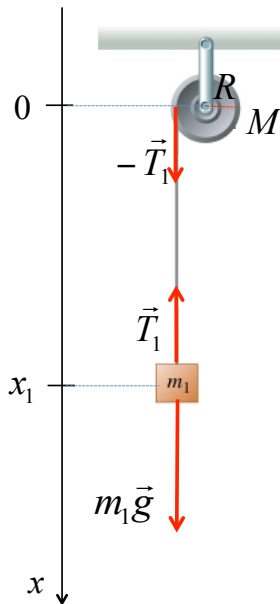
Applicazione #4: la macchina di Atwood (rivista)



$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = -m_2 g + T_2 \\ (M/2)a = T_1 - T_2 \end{cases}$$

Si vede che la massa della carrucola riduce l'accelerazione rispetto al caso ideale (parte dell'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di rotazione!). Inoltre, la tensione della fune ai due lati della carrucola è diversa!

Applicazione #4: la macchina di Atwood (rivista)



$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (M/2)} g$$

Notiamo infine che l'accelerazione di caduta della massa 1 è diversa da g anche quando la massa 2 non c'è e la fune si srotola direttamente dalla carrucola.

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

Un corpo rigido in quiete in un sistema di riferimento inerziale rimarrà in quiete (in equilibrio statico) se le forze esterne sono tali da non produrre alcuna accelerazione del CM né alcuna rotazione. Essendo il moto governato dalle equazioni

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad , \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

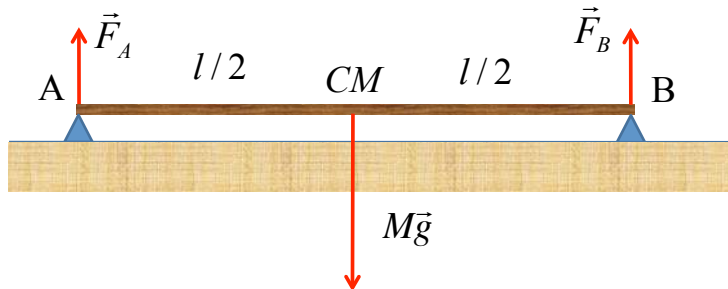
segue che la condizione di equilibrio è

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad , \quad \sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$$

dove la somma è intesa sull'insieme di tutte le forze esterne agenti sul corpo in esame.

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

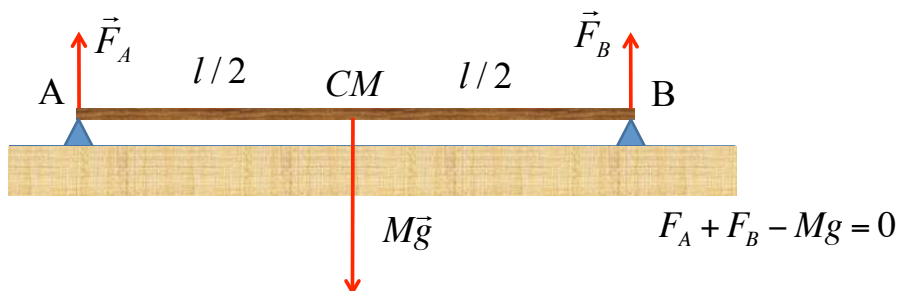
Esempio: **trave appoggiata** su vincoli lisci.



Le reazioni vincolari in A e B sono perpendicolari alla trave. Anche la forza peso è perpendicolare. Non ci sono componenti orizzontali delle forze. Equilibrio per traslazione se: $F_A + F_B - Mg = 0$

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

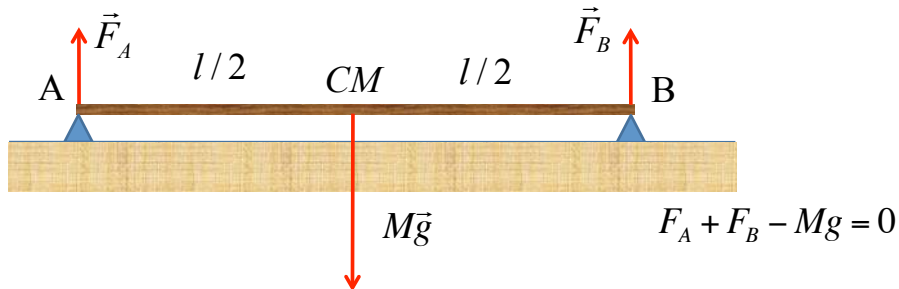
Esempio: **trave appoggiata** su vincoli lisci.



Per le rotazioni basta scegliere arbitrariamente un polo per il calcolo dei momenti, ad esempio il CM , e imporre che la somma dei momenti sia nulla. I momenti non nulli rispetto al CM sono solo quelli delle reazioni vincolari, e sono paralleli (perpendicolari alla slide) e di verso opposto...

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

Esempio: **trave appoggiata** su vincoli lisci.



... dunque la condizione di equilibrio per rotazioni è

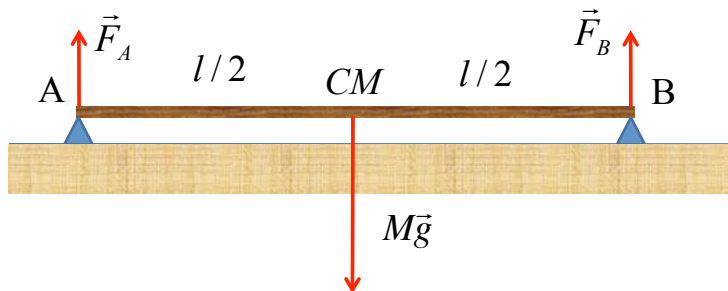
$$(l/2)F_A - (l/2)F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F_B$$

che unita alla condizione per le traslazioni dà

$$F_A = F_B = Mg/2$$

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

Esempio: **trave appoggiata** su vincoli lisci.



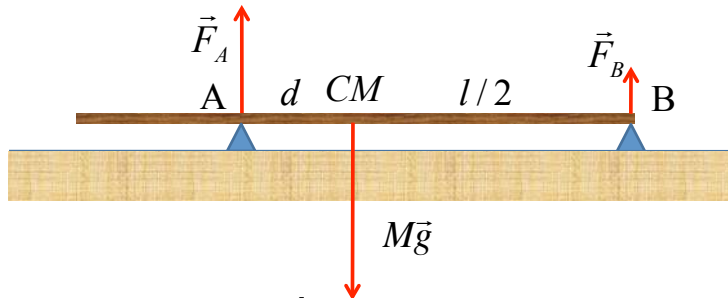
Il risultato non dipende dalla scelta del polo. Scegliendo ad esempio il punto A, avremmo ottenuto l'equazione

$$lF_B - (l/2)Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = Mg/2$$

come prima.

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

Spostando uno degli appoggi...



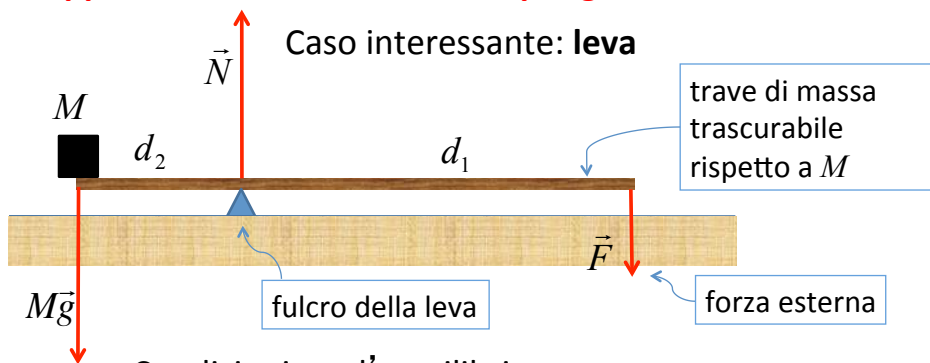
la condizione per l'equilibrio per traslazioni rimane la stessa, $F_A + F_B - Mg = 0$, e quella per le rotazioni diventa

$$dF_A - (l/2)F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = (l/2d)F_B$$

da cui si ottiene $F_A = \frac{(l/2d)Mg}{1+(l/2d)}$; $F_B = \frac{Mg}{1+(l/2d)}$

Applicazione #5: statica dei corpi rigidi

Caso interessante: leva



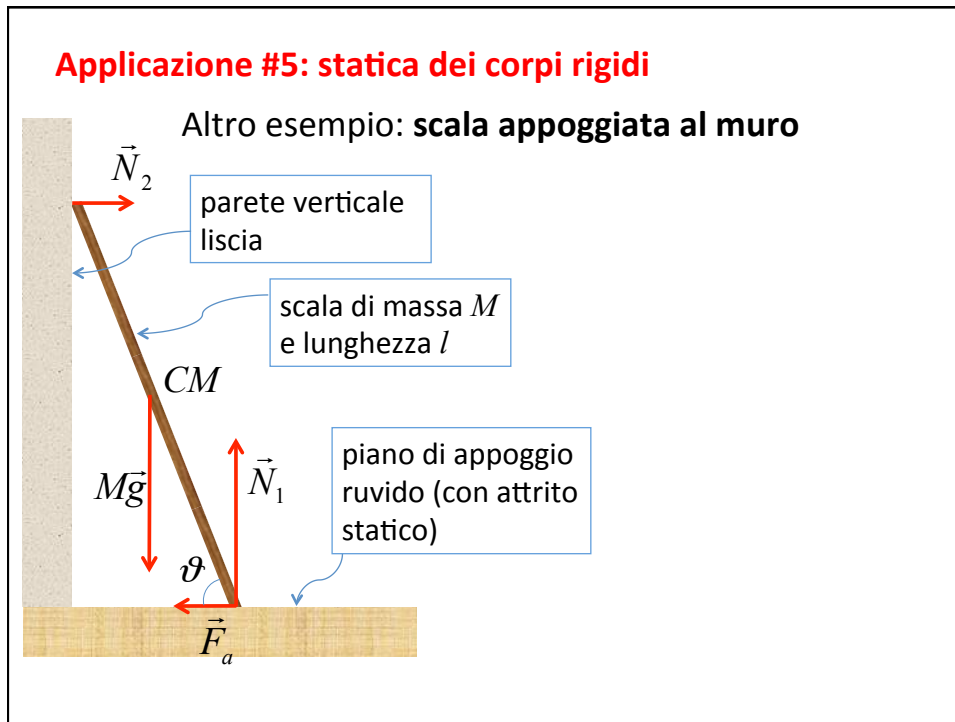
Condizioni per l'equilibrio:

$$N - F - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F + Mg$$

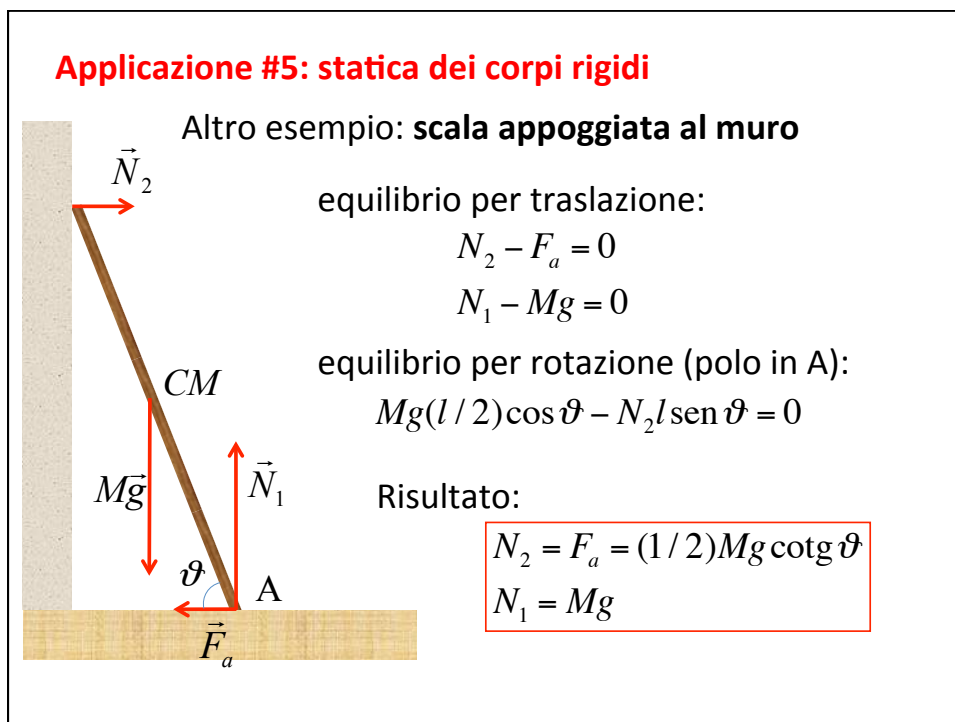
$$d_2 Mg - d_1 F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = (d_2 / d_1) Mg$$

Se $d_2 < d_1$, è sufficiente una forza minore di Mg per tenere sollevato il corpo di massa M !!

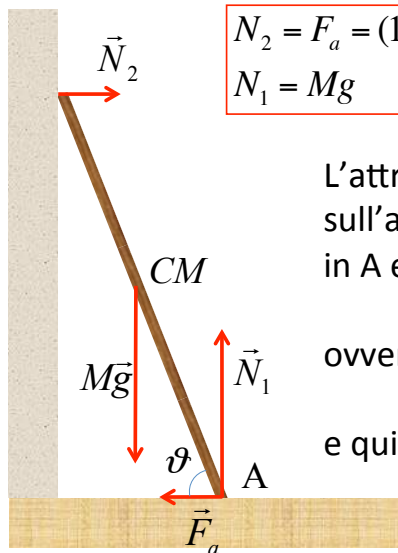
Applicazione #5: statica dei corpi rigidi



Applicazione #5: statica dei corpi rigidi



Applicazione #5: statica dei corpi rigidi



$$N_2 = F_a = (1/2)Mg \cotg \vartheta$$

$$N_1 = Mg$$

L'attrito statico pone una condizione sull'angolo per evitare lo scivolamento in A e la caduta. Dev'essere

$$F_a \leq \mu_s N_1$$

ovvero

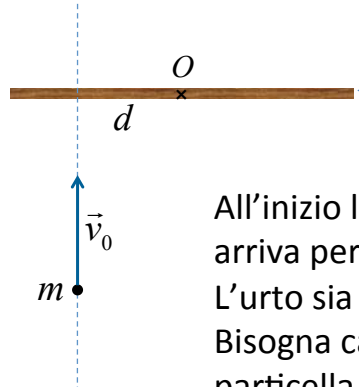
$$(1/2)Mg \cotg \vartheta \leq \mu_s Mg$$

e quindi

$$\cotg \vartheta \leq 2\mu_s \quad \Rightarrow \quad \vartheta \geq \arctg(1/2\mu_s)$$

Applicazione #6: urto con corpi rigidi

esempio: urto di una particella contro un'asta vincolata.

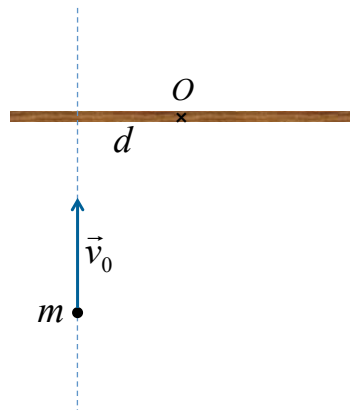


asta di massa M e lunghezza l ,
che può ruotare attorno al
punto O fisso.

All'inizio l'asta è in quiete e la particella arriva perpendicolarmente a velocità \vec{v}_0 .
L'urto sia elastico.

Bisogna calcolare la velocità finale della particella e la velocità angolare finale dell'asta.

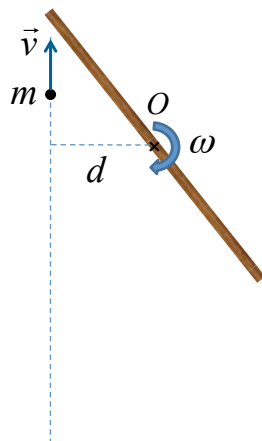
Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Cosa si conserva nell'urto?
 La **quantità di moto** totale **no**, perché la forza vincolare esterna in O è impulsiva (non trascurabile nell'urto).
 L'**energia cinetica** **sì**, perché l'urto è elastico per ipotesi.
 Il **momento angolare** **sì**, perché la forza esterna ha momento nullo rispetto ad O .

Inoltre la particella non cambia direzione di moto, perché le forze interne agiscono perpendicolarmente all'asta.

Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Le leggi di conservazione danno:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mv_0d = mvd + I\omega$$

con $I = (1/12)MI^2$

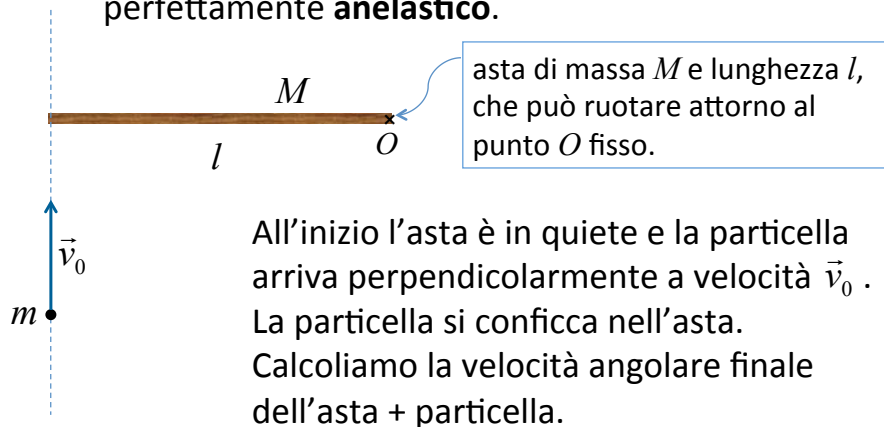
[...calcoli alla lavagna] Risultato:

$$v = v_0 \frac{1 - \frac{I}{md^2}}{1 + \frac{I}{md^2}} ; \quad \omega = \frac{2v_0}{d} \frac{1}{1 + \frac{I}{md^2}}$$

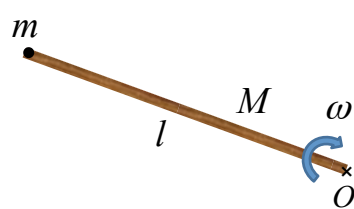
casi interessanti: $M \gg m$; $M \ll m$; $I = md^2$

Applicazione #6: urto con corpi rigidi

altro esempio: simile a prima, ma urto perfettamente **anelastico**.



Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Le conservazione del momento angolare:

$$mv_0l = I\omega$$

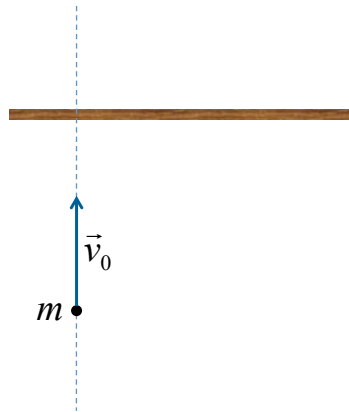
con
$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$$

Risultato:

$$\omega = \frac{v_0}{l} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{M}{m}}$$

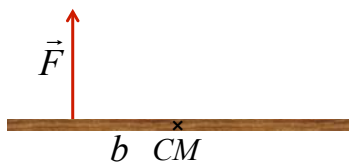
[cenno al pendolo balistico]

Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Se l'asta **non** è vincolata, dopo l'urto può sia traslare che ruotare, e si conserva anche la quantità di moto totale del sistema asta + proiettile.

Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Supponiamo che una forza impulsiva F agisca per un breve tempo dt , perpendicolarmente all'asta, a distanza b dal suo CM .

A seguito dell'impulso Fdt , l'asta acquisisce una certa velocità di traslazione del CM e una certa velocità angolare di rotazione attorno al CM . Le equazioni che governano il moto sono

$$M \frac{dv_{CM}}{dt} = F; \quad I \frac{d\omega}{dt} = \tau$$

ovvero

$$Mdv_{CM} = Fdt; \quad Id\omega = Fbdt$$

Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Notiamo che un generico punto A, a destra del CM a distanza a , si muove con velocità $\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_A'$, dove quest'ultima è la velocità rispetto al CM. Dunque

$$v_A = v_{CM} - a\omega$$

da cui

$$dv_A = dv_{CM} - a d\omega = \frac{F}{M} dt - a \frac{Fb}{I} dt = \left(1 - \frac{Mab}{I}\right) \frac{F}{M} dt$$

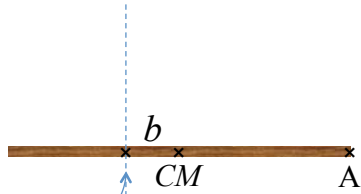
Applicazione #6: urto con corpi rigidi



Ora notiamo che se $b = \frac{I}{Ma}$

l'impulso Fdt non produce alcuna accelerazione in A. Se mettessimo un vincolo in A, questo non reagirebbe all'impulso (la reazione vincolare sarebbe nulla). In tal caso, il punto dove agisce la forza è detto **centro di percussione**.

Applicazione #6: urto con corpi rigidi



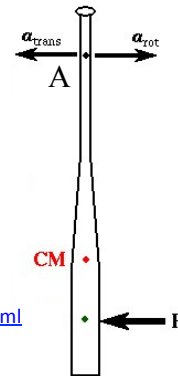
centro di
percussione

Per un'asta omogenea di lunghezza l , e nel caso in cui A coincida con un estremo, si avrà

$$b = \frac{(1/12)Ml^2}{M(l/2)} = \frac{l}{6}$$

Il centro di percussione è importante nella progettazione e nell'uso di racchette da tennis, martelli, asce, mazze da baseball, ecc.

[Si veda, ad esempio: <http://www.kettering.edu/physics/drussell/bats-new/cop.html> oppure <http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/tennis.html>]



Applicazione #7: trottole e giroscopi

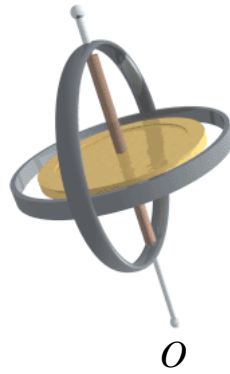
$$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$



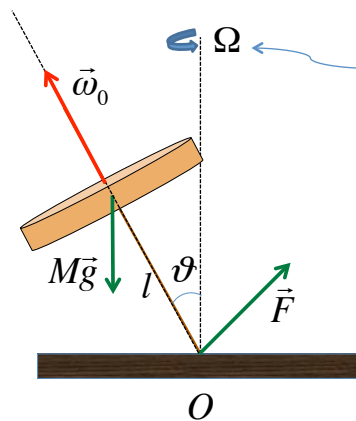
Applicazione #7: trottole e giroscopi

$$\vec{\tau} \neq 0 \rightarrow$$

precessione



Applicazione #7: trottole e giroscopi



velocità angolare di precessione

L'equazione del moto è la solita:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Scegliamo il punto O come polo.

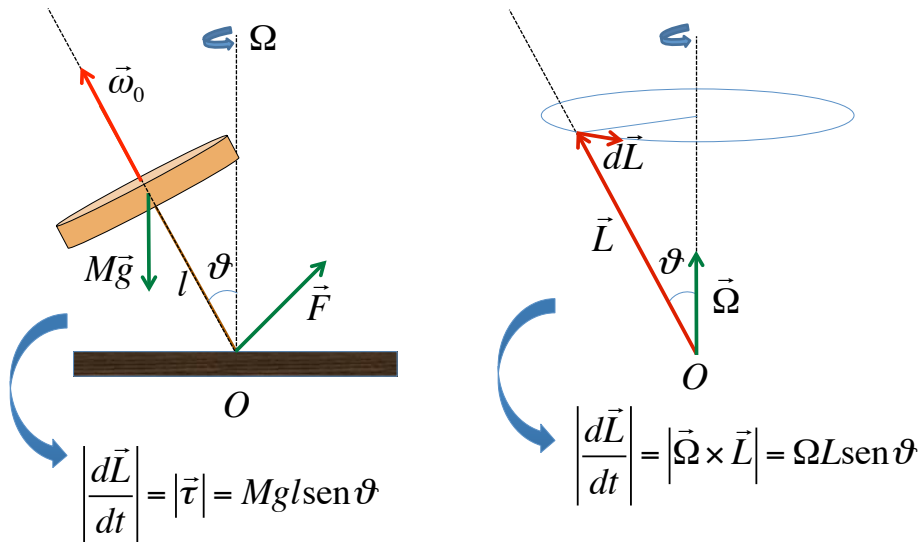
Assumiamo inoltre che

$$\Omega \ll \omega_0$$

in modo che il momento angolare sia

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_0$$

Applicazione #7: trottole e giroscopi



Applicazione #7: trottole e giroscopi

